如何唤醒数学脑

根っからの文系のためのシンプル数学発想術

[日] 永野裕之 著
刘格安 译

归纳整理、顺序概念、等价/因果转换、抽象思考、目
逆向思考、数学美感

日本国家级"数学
校长永野裕之力作！
数学高手的七种思维
"数学脑"训练经典之作

"为什么把一道题做很多遍的人，
往往比把很多道题只做一遍的人成绩好？"

"因为一旦掌握数学思维方式，解题就很简单了……"

不能光靠
死记硬背

请记住，做题的目的是为了训练你的逻辑能力、思考能力和发现能力！

时代出版传媒股份有限公司
北京时代华文书局

目录

封面

前言

第1章 唤醒你的数学力

数学式的阅读理解法

发现自己的数学力

第2章 什么是数学力？

算术与数学是两码事

任何人都具备的数学力

提升数学力的秘诀就是“停止背诵”

让“灵光一闪”成为必然现象

第3章 数理性思维的七个方面

第①方面 整理

通过分类推理出隐藏性质

为什么血型占卜这么受欢迎？

学习“图形的特性”的理由

在科学史上留下重要足迹的数学式分类

乘法式整理

何谓“和与积的信息量差异”？

次元增加，世界就会变宽广

意愿—能力（Will-Skill）矩阵

准备一份高效率的检查表

第②方面 顺序概念
选择时由大到小
必要条件和充分条件
合理选择的原则
关于“证明”
正确的证明是由小到大
“风一吹，木桶店就会赚钱”是真命题吗？
第③方面 转换
换句话说
活用等价变换
理解函数
函数才是真正的因果关系
第④方面 抽象化
抽象化=推敲出本质
归纳出共同的性质
生活中随处可见的抽象化
抽象化的练习
模型化
图论
柯尼斯堡问题
图论的应用
第⑤方面 具体化
提出具体实例
认识“等差数列”的第一堂课

“比喻”是具体实例的进化型
从名言当中学习如何运用贴切的比喻
往返于具体与抽象之间
演绎法和归纳法
演绎法和归纳法的缺点
什么情况适用演绎法和归纳法
第⑥方面 逆向思维
对偶和反证法
能平息怒火的ABC理论
逆、否、对偶命题
反证法
阿基米德与王冠
反证法的陷阱
第⑦方面 对数学的美感
指挥家的练习
古典音乐的特征
和弦与和弦记号
数学和音乐的共同点
讲求合理性
利用对称性
追求一致性
后记

封面

日本国家级"数学强劲私塾"
校长永野裕之力作！
数学高手的七种思维方式！
"数学脑"训练经典之作！

归纳整理、顺序概念、
等价/因果转换、抽象思考、具象思考、
逆向思考、数学美感

数学脑如何唤醒

根っからの文系
のためのシン
プル数学発想術

[日] 永野裕之 著
刘格安 译

"为什么把一道题做很多遍的人，
往往比把很多道题只做一遍的人成绩好？"
"因为一旦掌握数学思维方式，解题就很简单了……"

不能光靠
死记硬背

请记住，做题的目的是为了训练你的逻辑能力、思考能力和发现能力！

时代出版传媒股份有限公司
北京时代华文书局

前言

你自认数学不够好吗？

因为工作的关系，时常有学生来向我咨询未来的升学方向。但有一种现象始终让我耿耿于怀，就是很多学生会因为数学（理科）不好而选择文科，或因为语文（文科）不好而选择理科。而区分文、理科的目的是为了区分出个人有兴趣的领域，而不是为了把个人不擅长的特定领域强化为一项既定的事实。我在提供升学意见时，一定会问学生：

“你的梦想是什么？你喜欢什么科目？”

然后再根据学生的回答，一起思考哪一所大学、什么专业比较适合他，尽量不让文、理科干扰到他的升学方向。

你是如何选择的呢？

如果你是以将来的梦想或喜欢的科目为基准而选择文科，那么数学好不好基本上不会左右你的升学方向，又或者数学这个科目根本就难不倒你，至少你不会因为自己学文科，而在数学方面感到自卑。如果你是那种“名副其实”的文科生的话，那这本书恐怕对你没有太大帮助（话虽如此，若你愿意拨冗一读，我还是很高兴的）。

但是，如果你是因为想逃避数学才选择文科的话，就另当别论了。过去你在自称文科生的时候，是否会下意识地认为“因为我是学文科的，所以数学不好”？而现在你会愿意翻阅这本书，是不是因为觉得“如果能够以数学的逻辑来思考，或许会对工作或生活有所帮助”呢？

利用数学逻辑进行思考，确实能给生活带来方便，使我们更有创造力。如果你明明知道这个道理，却因为“反正我没那个天分”的想法而放弃，那就太可惜了。不过现在你可以放心，因为本书就是为了这样的你而存在的！

在这本书的一开始，我想先强调一件事：用数学逻辑进行思考并不需要任何天分。把数学思维活用于日常生活中，根本不需要什么特别的天分，除非你想成为全世界首屈一指的数学家。

接下来，读完这本书，你一定能学会如何以数学思维来思考。同时你也会明白，“因为我是学文科的，所以数学不好”这句话的“因为……所以……”之间毫无因果关系。从此以后，你不再是那个因为数学不好而选择文科的人，你可以大大方方地告诉别人：因为我对文科感兴趣，所以我选择文科。

学习数学的意义

我想所有对数学感到头痛的人，求学期间肯定都有过痛不欲生的经历：

“为什么要逼我学数学？”

如果是语文或英语等科目，即使再怎么棘手，也很少有人会去怀疑学习这些科目的目的，但对于数学来说，很多学生无法理解学习它的意义。在此，我想向各位分享一句我经常引用的爱因斯坦的名言：

“教育就是当一个人把在学校所学全部忘光之后剩下的东西。通过这股力量培养出能够独立思考、行动的人，并解决社会面临的各种问题。”

大部分人在步入社会以后，应该很少有机会去解一元二次方程、计算向量内积或是微分吧。如果学习数学只是为了熟悉这些计算技术，那么对大多数人来说的确没什么意义，只需针对那些工作上需要用到这些专业技术的人授课即可。可是几乎所有国家都把数学纳入义务教育的一环，这是为什么呢？

因为学习数学是一种培养逻辑思维能力的方式。一元二次方程或向量都只是用来锻炼逻辑思维的工具而已。

“逻辑思维能力”是一种不分文理，所有人都应该具备的能力，这一点我想应该不会有人提出异议。在这个早已迈入国际化、信息化社会的时代，想要达到不说话就“心有灵犀一点通”的境界，几乎是一种幻想。当一群成长环境不同、想法不同的人聚在一起，试图解决各种以往未曾碰到过的问题时，自然必须具备理解他人想法、用自己的想法说服他人，以及任何情况下都能将问题抽丝剥茧、解疑释结的能力。逻辑思维能力就是实现这一切的基础能力，因此为了锻炼这种能力，所有人都必须学习数学。

语文能力才是数学能力的基础

在我的补习班中，所有数学不好却能在短期内提高成绩的学生，都有一个共同点，就是具备优异的语文能力，尤其是能够按照清楚的条理构建文章，或是能够将别人的话转换成自己的方式表达的人。由于他们在逻辑思维方面，本身已具备最基础的能力，因此能够迅速吸收我所传授的正确读书技巧，并且在短时间内提升数学能力。

反之，那些语文能力不佳的学生大多学习效果也不佳。不用说也知道，人类在思考事情时，使用的工具正是语言。如果缺乏一定程度的语文能力，自然无法建构出强而有力的逻辑思维。在此稍微岔开一下话题，我个人对于数学的早期教育或提前学习的必要性是充满怀疑的。就算比别人早一点儿学会微分，又有什么意义呢？如果不知道牛顿或莱布尼茨是在何种动力驱使下推导出微分的概念，以及这个概念又有怎样无人能及的贡献，那么学习微分是没有任何意义的。我个人强烈建议，与其盲目地让学龄前儿童提早学习算术或练习数学计算题，倒不如鼓励孩子多读书、积累丰富的经验，借此培养他们的好奇心，并提升整体的“语文能力”。能够用自己的语言进行完整的思考分析，不但对将来大有帮助，也是培养数学能力的基础。如果你将来想让自己的孩子考上东京大学，我希望你能将孩子培养成一个能够清楚向他人解释“为什么想进东大”“考上东大以后想做什么”的孩子，如此一来，他自然而然会具备相应的学习能力。

本书是特别为那些自认为数学不好的“标准文科生”所写的。因为我一直认为，擅长阅读或写作却不擅长数学是一件矛盾的事。不过我也深知那些讨厌数学的人，对于数学算式是多么地头疼，因此本书尽可能减少使用数学算式的频率，尽管不用数字或算式来传授数学思考的诀窍难度颇高，但为了证明扎实的语文能力是数学能力的基础，同时也为了让你了解学习数学的意义，我认为这是一件相当值得挑战的事情。

另外，通常不擅长数学的人，只要一听到“数学”二字，就会联想到复杂、困难，但数学其实是一门讲求简单与明了的学问。如果本书介绍的思维方式能让你觉得“其实数学挺简单的”，那么我的目的就达到了。

本书的使用方法

这是一本帮助觉得自己数学不行的人，唤醒与生俱来的数学力和逻辑思维能力的书。本书最大且唯一的目标，就是让你在读完本书时发现：“哇，原来我也有数学思维能力啊！”从而掌握运用数学来进行思考的方法。在本书中，我将“数学思考法”从七个方面进行了整理。

①整理

②顺序概念

③转换

④抽象化

⑤具体化

⑥逆向思维

⑦对数学的美感

怎么样？其中至少有几项会让你想到：“啊，这种思考方式好像平常就在使用了。”对吧？我想再强调一次，数学并非专属于那些“有天分”的人。运用数学逻辑进行思考是任何人都做得到的事，甚至有许多人早已在无意识中就运用数学逻辑进行思考了。但是能不能“有意识地”运用数学逻辑进行思考，却是另外一码事。在无意识的情况下，我们如果不依赖“灵光一闪”和“直觉”等，就没有办法解决问题，也无法想出什么好主意，但如果能够了解如何运用数学逻辑进行思考，并且明确意识到这件事的话，不但能够顺利解决问题，而且必然能够开拓出他人眼中的崭新思维。同时，你说出口的话会格外具有说服力，让人想不侧耳倾听都难。在此我诚挚希望本书能够帮助你激发体内潜沉已久的数学力。

永野裕之

第1章 唤醒你的数学力

请思考下面的问题（抱歉！一开始就出题考你）。

问题

请在下面的括号中，填入正确的答案。

甲、乙、丙三人正在接受面试，其中只有一人说的是真话，另外两人说的都是谎话。

甲说：“乙在说谎。”

从这句话可推知，（ ）肯定在说谎。

很像一道谜题吧？但这道经典的问题可是出自2004年庆应义塾大学环境情报学院的入学考试试题。而且值得一提的是，这是一道“数学”考题。这道题目的答案和解析过程如下：

答案

丙

解析

假设甲说的是真话，又因为说谎者有两人，即代表乙和丙在说谎；反之，假设甲在说谎，那么“乙在说谎”这句话即为谎话，故乙说的是真话。由于说谎者有两人，因此丙是另一位说谎者。根据以上两种情况可推知，不论是哪种情况，丙肯定是说谎者之一。

所谓的数学力，就是运用这种方式进行逻辑思考的能力。从数学力的根本来看，计算速度快、懂得解方程或推导问题，都只是微不足道的能力而已。为了让你实际体会这一点，本章将以“数学式”的形式，示范如何解答阅读理解的题目。接下来请舍弃先入为主的观念，跟着以下内容一起进入本章的重点。

数学式的阅读理解法

在阅读理解文章的时候，文科生恐怕很少能意识到自己正在运用数学式的方法进行解析。但是，只要阅读理解的内容是议论文、说明文而非抒发个人感情的文章，那么应该自然而然就会以数学逻辑思考的方式阅读理解文章。

接下来的内容是日本大考中心测试（2012年语文正式测试）的阅读测试题。此处最重要的一点，就是排除所有个人的感情或想法，依据本文所提供的线索，以逻辑式的思维来解决问题。只要能够做到这一点，任何人都能得到正确答案，不需要所谓的“直觉”或“灵光一闪”。“逻辑”最大的魅力，就在于不论有没有特殊天分都能得到相同的结论。

第一题　请阅读以下文章，并回答下列问题（问题1～问题5，共50分）。

包含人类在内的所有生物，在其与环境之间，一律保持最适当的距离来生存。为了

繁衍后代而寻找配偶、为了躲避寒暑或风雨而兴建坚固的居所或改变居住地来躲避敌人和驱逐竞争对手，这些都是生物为了维持生命而采取的行动。不过无论如何，生物从环境中觅食的行为，毋庸置疑是维持生命的最基本活动。

生物在从事这些维持生命的行为时，无疑都是以单独的个体为单位的。每个个体在各自固有的环境里，有时与同物种的其他个体合作，有时在与同物种其他个体或不同物种个体的竞争关系中确保自我的生存。在这样的情况下，（A）与某个体有关的其他个体自然也是构成该个体周遭环境的要素之一；除此之外，该个体本身的各种条件，例如饥饿、疲劳的程度、性欲、运动或感觉能力等，也属于环境要素中的“内部环境”。这样一想，我们实在很难明确定义个体与环境的连接点或边界究竟是什么。其中最具争议的要点在于：假如构成个体本身的各种条件也一律被视为环境，那么所谓的“个体”指的究竟是什么呢？假如此处所称之边界的“另外一边”是所谓的环境，那么边界的“这一边”又存在着什么呢？似乎也无法单纯说是该个体或有机体了。

复数的个体又如何呢？为了简化情况，此处就以彼此之间拥有合作关系的两个人——夫妻为例。即使是夫妻，两人绝对都是生存在各自固有世界的独立个体。我所生存的世界，累积了我从孩提时期以来的经验和记忆，而我的妻子也一样。我们不可能完全地同化，更不可能交换彼此的过去。不过任何一对夫妻一旦结婚，便开始拥有与其他夫妻完全不同、两人之间专属的回忆。而这样的默契会让两人在面对某些事情时，即使不刻意开口与对方商量，也能在无意识间形成一种采取共同行动的默契。就这个角度而言，将夫妻结合在一起视为单独的“个体”也是无妨。这一点同样也可以适用在一个家族、一群长年往来的朋友等具备共同利害关系的团体。人类以外的动物，例如鱼、鸟或社会结构井然有序的昆虫等，更明显存在着这种整个族群如单一个体般行动的现象。

换言之，即使是在这种“族群”的情况下，基本上还是因为每个个体都以族群的繁衍为目的，因此就如同单独个体试图维持生存的情况，这些复数个体也会确保在与环境的边界上维持最适当的接触。而此处同样无法单纯地把族群整体归进此边界的“这一边”。第一，和个体的情况不同，族群与环境之间已经不存在物理上的边界线；第二，就“构成族群的复数个体又分别是族群整体重要的内部环境”这一点来思考，应该很清楚情况绝对无法简单说明。构成族群的各个体的行动，绝不可能完全被族群整体的行动所同化，且每一个单独的个体又必须应付各自的需求。每一个个体都在各自与环境之间的交界面上独自维持着生命，同时又遵守着族群整体的行为模式，基本上不会出现任何个别行动破坏全体秩序的情况。

我们在前文中已知：生物个体或由个体的思维所组成的族群，在其与环境的交界面上进行的维持生命的活动，（B）具有令人难以想象的复杂结构。当这样的情况套用在自我意识强烈的人类身上时，其复杂程度更是大幅增加。举例而言，即使是一个在与外部环境接触面上行为较团结的家族，与动物相较之下，其家族内部的每个人仍然会表现出格外强烈的自我意识和自我主张。由于个人的行动而破坏家族整体和谐的情况也绝不在少数。此时，这种不存在于人类以外的生物身上的“自我”与自我以外的“其他人”之间的对决，明显比整个家族的和谐更为重要。除了家族之外，其他由人类组成的团体在各种场合会发生的情况其实也都大同小异，此处就不再一一列举。

关于人类的自我意识究竟是如何形成的，其实各种假设都有可能成立。不过无论是哪一种假说，自我意识肯定是“进化”的产物之一。所谓进化的产物，即代表它是为了生存目的而存在的。通过自我意识的形成，人类即可在与环境接触的过程中获得新战略。然而有些时候，原本该对生存有利的自我意识，却与同样以生存为目的的集体行动互相对立，这应该是（C）人类作为生物最大的悲剧吧。我们究竟该怎么

做，才能够取回“自我意识”这项人类尊严最本质的意义呢？

“我”的自我意识并非只是个体的个别意识而已。如果只是指单一个体意识到自己与其他个体之间是各自独立的存在，那么恐怕有许多动物都具备相同的能力。拥有明确个体识别能力的动物不在少数，而且识别其他个体和自我认知是同一种认知机制的一体两面。与此不同的是，人类意识自己为无可取代的“我”，并赋予这个第一人称代名词和其他个体完全不同次元的——与其他个体间的差异，以性质完全相异的特殊差异与他者作区别——独一无二的特权性意义。所谓的“我”并非等质空间内的任意一点，反而是如同圆心般，与外在所有的点本质上皆相异的特殊点。

在这种以“我”为名的自己与他人之间，也可以认为存在有精神分析中以“自我边界”的形式构成的边界线。一般所谓的“自他关系”，指的应该就是与这条边界线交会的心理上的关系。这条边界线被假定在两个领域之间，分别是“外部世界的其他人”和“内部世界的自己”。（D）不过这样的设定并不适合用来思考作为特异点的“我”。假如“我”是圆的中心的话，所有我以外的其他人都位于中心之外。就连“我”自己本身，都在意识到这一点的瞬间被推出中心之外。不过中心并没有所谓的内部。或者若将中心本身视为“内部”的话，中心的“内”与“外”的边界就是自己本身。“我”和他人的关系也是同样的道理，“我”占据了一个不合理的位置，因为“我”既身为“内”，又同时身为“内”和“外”的边界。因此所谓的“我”，其实也就等同于“自我边界”。

与等质空间中的边界线不同，生命空间中的个体与环境的边界并没有所谓“这一边”的“内部”概念。换言之，生物是活在本身与所有身外之物的交界处，即所谓的边界上的。当我们清楚地意识到并活在自己与他人的“边界”上时，就会产生人类特有的自我意识。而这种现象不仅发生在单独的个体身上，就连族群全体也是完

全相同的情况。人类口中的“我”或“我们”，都有意识地活在与他人之间的边界上。

若将生命的行为投射在物理空间上，是否皆会形成所谓的边界呢？反之，存在于我们周遭世界的所有边界之中，可以说无论是空间上还是时间上的边界，总是会让人感受到生命的迹象。正因为有这样的迹象，才得以让边界的概念获得合理的解释，并存在于无穷无尽不可思议的场所吧。边界或许就是尚未成形的生命的——借用尼采的话就是“权力意志”的——居所吧。

（摘自木村敏《自我边界》）

问题1　请问划线部分A“与某个体有关的其他个体自然也是构成该个体周遭环境的要素之一”表达的是什么意思？请从选项①～⑤中挑选出最恰当的解释。

①对特定个体而言，除了负责种族延续之外，在追求配偶时遇到的其他竞争个体也是环境的一部分。

②对特定个体而言，除了竞争食物的对手之外，在生存上能互相协调的不同物种个体也属于环境的一部分。

③对特定个体而言，除了饥饿和疲劳等生理现象之外，生态圈中各种欣欣向荣的植物也是环境的一部分。

④对特定个体而言，除了气候等自然现象之外，在进行觅食等行为时交会的其他个体也是环境的一部分。

⑤对特定个体而言，除了维持自我生命必要的自然空间之外，与其他个体共同生活的空间也是环境的一部分。

感觉很像是一篇说明文对吧？或许有人会觉得文章内容稍有难度。不过这种晦涩的表现方式，代表笔者试图运用逻辑来说明，因此如果能够运用逻辑来解读，要理解笔者的论点其实没有那么困难。

现在我们就来实际解题看看吧。

我想所有文章都有一个共同点，就是笔者会不断重复他想传达的讯息。话虽如此，这并不表示相同的内容会重复出现，大部分情况下，笔者会用换句话说的方式来重复他的论点。所谓的换句话说，有可能是纯粹改用其他表现方式，也有可能是提出具体的例子（引用）或是运用比喻。总而言之，就是转换（第三章的第③方面）自己的论点。而现代文的题目，大多可以利用这种转换解析法来解题。

笔者的论点=其他表现方式=具体实例、引用=比喻

在解答这个问题时，同样先从寻找跟划线部分A相同叙述的内容开始。首先确认那句话前面的“在这样的情况下”（文章第九行）指的是什么情况。“这样的情况”即“有时与同物种的其他个体合作，有时在与同物种其他个体或不同物种个体的竞争关系中确保自我的生存”（文章第八行），此处所谓的“确保自我的生存”就是“维持生命的行为”（文章第七行）的另一种说法。另外，“维持生命的行为”的具体实例则列举在文章的第一段：

“（第二行）为了繁衍后代而寻找配偶”

“（第二行）为了躲避寒暑或风雨而兴建坚固的居所或改变居住地”

“（第三行）躲避敌人和驱逐竞争对手”

“（第四行）生物从环境中觅食”

根据以上汇总，可大致理清划线部分A前的“在这样的情况下”指的是什么内容。接下来我们终于可以转换划线部分A的各个部分了。首先是划线部分的主题，

“与某个体有关的其他个体”（主题）=“同物种其他个体或不同物种个体”（文章第八行）

接下来，

“该个体环境”=“配偶”“寒暑或风雨”“敌人”“觅食（的对象）”（文章第一段）

整理到这个步骤以后，再重新检查一遍答案的选项：

①过度局限于子孙或配偶×

②并不仅限于“能在生存上互相协调”的不同物种个体×

③以“植物”为主题×

⑤以“空间”为主题×

根据上述原因可推知，④是正解。为什么呢？只要像这样着眼于划线部分前的指示代名词和划线部分的内容变换并加以整理，那么我想在解题时，你一定可以很自信地推导出“正确答案”（不过偶尔也会有一些很让人头痛的陷阱题）。

问题2　请问划线部分B“具有令人难以想象的复杂结构”所要表达的是什么意思呢？请从选项①～⑤中挑选出最恰当的解释。

①即使是一个由外部环境看来属于单一个体的族群，构成其内部环境的各个体仍会

谋求独立于族群之外，以维持其个体的存在。因此，内部环境经常充斥着紧张的关系。②即使是一个由外部环境看来属于单一个体的族群，在碰到要维持生命的实际状况时，内部个体的相互利害关系就会表露出来。因此，族群行为的统一性的内涵实际上经常处于变动的状态。

③即使是一个由外部环境看来属于单一个体的族群，构成其内部环境的各个体依旧各自采取自由的行动。只是各自采取的行动总是能够协调出最适合整个族群的结果。

④即使是一个由外部环境看来属于单一个体的族群，内部也有可能生成破坏整体秩序的个体。不过各族群在进行生命维持活动时，自然而然会封锁住这样的可能性。

⑤即使是一个由外部环境看来属于单一个体的族群，构成其内部环境的各个体依然会按照各自的需求采取行动。尽管如此，族群并不会失去维持生命必须的秩序。

为了确保逻辑性，最重要的事情就是在检验结论前，先清楚地掌握前提或假设。如果不能遵循顺序（第三章的第②方面）的话，得出的结论便不足以为信。比如说，假设有一本杂志刊登了吸尘器的广告，广告标语是“在美狂销热卖”，但这并不能够保证该款吸尘器也适用于日本，因为那有可能是专门为了美国家庭所设计的产品。由于日本和美国的住宅形式大不相同，因此也必须慎重考虑其他方面。至于问题2的部分，我想只要把焦点着眼于前提，答案也就呼之欲出了。

由于划线部分的前面提到“我们在前文中已知”，因此这表示我们可以从前面的段落找到将划线部分换句话说的句子。前一段提到“在这种‘族群’的情况下”（文章第四段第一行）。

前提

“在这种‘族群’的情况下”=“人类以外的动物”（文章第三段第十行）

换言之，我们要注意的是，这一整段都是在谈论鱼、鸟和昆虫。此外，如果我们把焦点放在划线部分“复杂结构”的“复杂”二字上的话，可以用以下的方式变换：

结论

“复杂结构”=“无法单纯地把族群整体归进此交界的‘这一边’”（文章第四段第四行）=“就‘构成集团的复数个体又分别是族群整体重要的内部环境’这一点来考虑，应该很清楚情况绝对无法简单说明”（文章第四段第六行）

而关于“复杂”的内容则汇总在该段落（文章第四段）的最后：

结论

“每一个个体都在各自与环境之间的交界面上独自维持着生命，同时又遵守着族群整体的行为模式，基本上不会出现任何个别行动破坏整体秩序的情况。”

由于段末提到“不会出现”，因此我们可以确定这不是经过人类特有的“自我意识”所调整或强制的结果，而是在人类以外的动物身上自然发生的现象。

①本文中并未提及“各个体仍会谋求独立于族群之外，以维持其个体的存在”“内部环境经常充斥着紧张的关系”×

②本文中并未提及“内部个体的相互利害关系就会表露出来”“族群行为的统一性的内涵实际上经常处于变动的状态”×

③“各自采取的行动总是能够协调出最适合整个族群的结果”与自然发生的语意不符×

④“各族群在进行生命维持活动时，自然而然会封锁住这样的（破坏行动）可能性”也与自然发生的语意不符×

根据上述原因可推知，⑤是正解。这个问题的解法比较简单。

问题3　请问划线部分C“人类作为生物最大的悲剧”是什么意思呢？请从选项①～⑤中挑选出最恰当的解释。

①人类因为具备自我意识，所以能够以更适当的方式与环境接触，但在某些情况下，个体的意识与族群的目的之间会产生矛盾，甚至有可能造成族群分崩离析或威胁到个体存续。②人类因为具备自我意识，所以能够形成一个以维持强固族群为共同目的，且从未见于其他生物族群的社会。但在某些情况下，人类可能会为了维护族群整体的秩序而压抑个体的需求。

③人类因为具备自我意识，所以更能够达成与环境之间的调和，但在某些情况下，遇到生存竞争的场面时，人类与其他生物对决的能力可能会减弱，甚至有可能危及种族的存续。④人类因为具备自我意识，所以懂得以战略性的方式保护自己不受其他生物侵扰，但在某些情况下，由于保护族群的意识过于强烈，因此会为了族群间的利害关系，而爆发其他生物族群所没有的斗争。

⑤人类因为具备自我意识，所以能取得与环境之间更有利的接点，但在某些情况下，人类会给环境带来重大的改变，甚至陷入自主维持族群行动遭到威胁的严重事态中。

数学往往给人枯燥乏味、复杂难懂的印象，或许也有人对排列在一起的文字和数字持有冷硬的印象，但真正的数学绝非如此。数学是一种语言，也是一门非常美丽的学问。为了能够灵活运用这门美丽的学问，培养数学的美感（第三章的第⑦方面）

就成了一件意义格外重大的事。我认为逻辑本身就已经很美了，但数学所具备的对称性、一致性等特点，不更是直接的美的象征吗？

在逻辑性的文章当中，有不少地方呈现出这种与数学相似的美。比如说，列出两组例子作对照的论述方法，是说明文中常见的结构，同时也呈现出结构上的对称性。关于问题3的部分，我们可以把焦点摆在这种对立结构（对称性）上。划线部分C提到“人类作为生物”，前一题所关注的焦点又是在讨论“人类以外的动物”，所以接下来，我们就拿人类以外的动物和人类来互相比较一下吧。

［人类以外的动物］

“基本上不会出现任何个别行动破坏全体秩序的情况。”（文章第四段第十一行）

对比

［人类］

“原本该对生存有利的自我意识，却与同样以生存为目的的集体行动互相对立”（文章第六段第四行）

划线部分C“人类作为生物最大的悲剧”，指的是所有生物当中，只有人类会在“自我意识”与“集体行动”之间，产生“互相对立”的矛盾。

由于“自我意识”这个词不太容易理解，所以我们在此将它变换一下。

“自我意识”=“‘进化’的产物之一”（文章第六段第二行）=“为了生存目的而存在”（文章第六段第三行）=“新战略”（文章第六段第四行）

接下来，我们就来检验一下答案的选项。

②“为了维护族群整体的秩序而压抑个体的欲求”，实际上完全相反×

③本文并未提到“人类与其他生物对决的能力可能会减弱”×

④本文并未提到“保护族群的意识过于强烈”×

⑤本文并未提到“环境带来重大的改变”×

故正确答案是①。

问题4　划线部分D“不过这样的设定并不适合用来思考作为特异点的‘我’”，请问笔者是基于什么样的想法才判断不适合的呢？请从选项①～⑤中挑选出最恰当的解释。

①若将人类的认知机能视为一种识别其他个体与自我的运作机制，那么前提就是自己与他人之间存在着一条绝对的边界线；然而若将自己的存在视为圆的中心，那么“我”的内部世界的意思就会改变，边界将成为一种相对存在的概念。②若以精神分析理论将“我”定位为世界上独一无二的自己，那么只要将边界线设定在等质空间内即可确保理论的成立，但由于自我意识的“我”位于边界线上，所以相对于他人，必然会把自己过度特权化。

③若通过与他者所属的外部世界间的对立关系来定义自己，代表假说中存在着一个以边界相隔的空间上的内部世界，但拥有绝对独特性的“我”的自我意识，是一个没有内部空间的圆的中心，反而本身就是与他者之间的边界。④在个体的外部设定边界，确立出自己的绝对异质性的“我”的世界，是建立在被赋予特权的第一人称代名词的坚固基础上，但当其他人也用同样的语言确立内部世界时，边界就成为一种共有的概念。

⑤把所有的他者置于外部世界、把自己牵制在内部世界所形成的“我”，在假说上存在着认知机能上的绝对边界线，但由于无法合理证明该内部世界里的自我意识本身就处于空间上的中心，因此反而只能说“我”就位于边界线上。

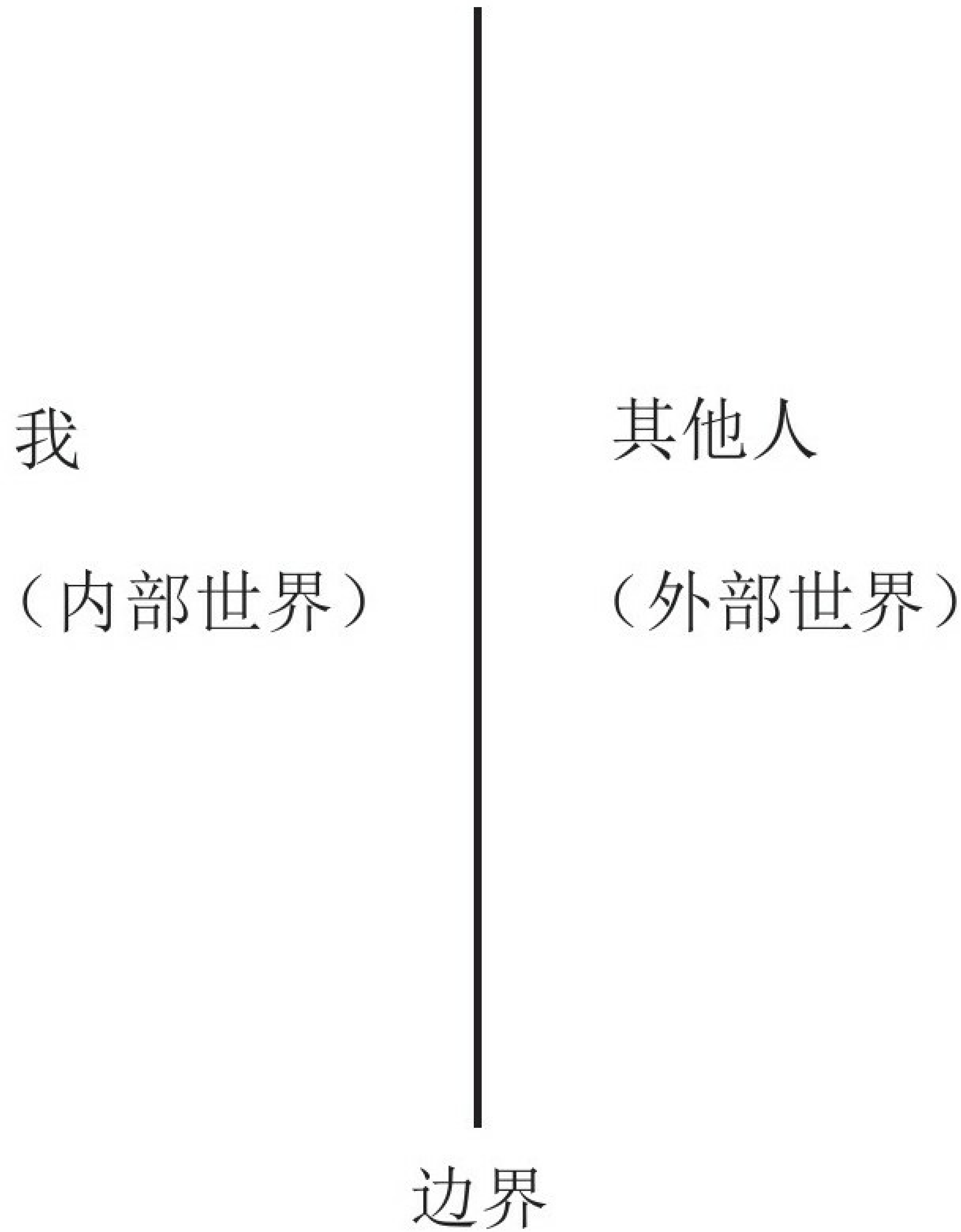
从小学升到初中后，数学这门科目最大的变化就是纳入了负数及文字的使用。尤其在运用抽象化（第三章的第④方面）的技巧时，把文字当作数字来使用，就会成为非常强大的武器。夸张点儿说，“数学无时无刻不在尝试把具体的事物抽象化”。因为抽象化成功的话，就能显现出事物的本质。当然，抽象化也可以通过文字以外的方式加以实现。其中典型的例子就是“图像化（模型化）”。

由于本题的题目本身就出现了边界线、圆等字眼，因此我想作者在书写时，脑海中可能也在将自己想说的话化为图像，就算不是这样，只要试着把文章图像化，就能在理解文章主旨时获得莫大的帮助。

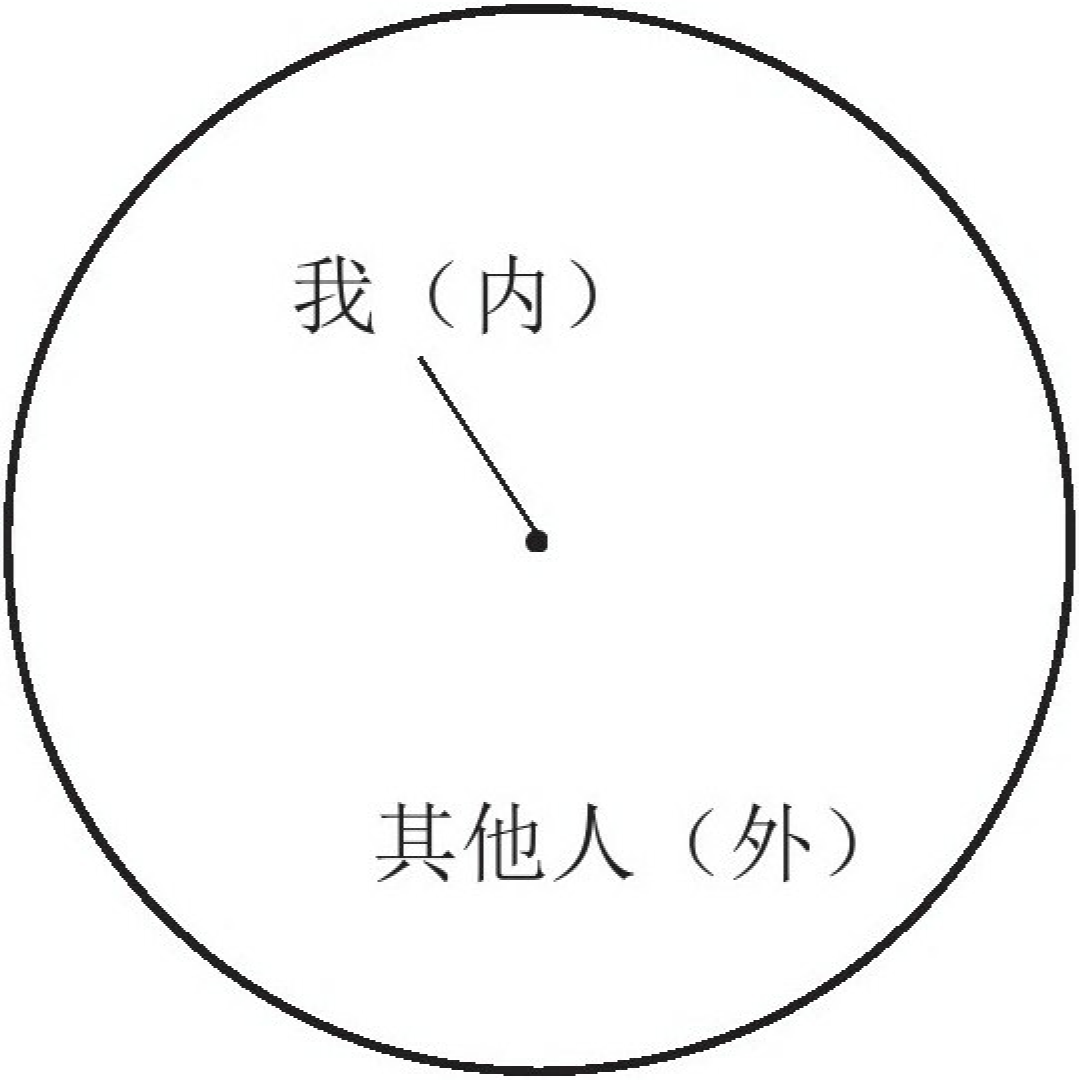
最近越来越常听到人们提起“信息图表（infographic）”一词。所谓的信息图表，就是一组内含多种信息的图表，此处应该不用举例也知道，利用图或图表将概念可视化，有助于我们对事物的理解。

接下来，就让我们把划线部分D附近的内容画成一张图看看吧。

“这条边界线被假定在两个领域之间，分别是‘外部世界的其他人’和‘内部世界的自己’”（文章第八段第三行），画成图的话就会像这样：



相对的，“假如‘我’是圆的中心的话，所有我以外的其他人都位于中心之外”（文章第八段第五行），画成图的话就会是这种感觉：



作者在此处提到“中心并没有所谓的内部”（文章第八段第七行），所以为了方便起见，上图把中心处涂成一个小黑点，不过所谓的“点”本来就是指“只有特定位置而没有大小的图形”（《大辞泉》），因此作者才会说“中心

的‘内’与‘外’的边界就是自己本身”（文章第八段第八行）。接下来，如果把自己当作圆的中心的话，就会得到“所谓的‘我’，其实也就等同于‘自我边

界’”（文章第八段第十一行）的结论。

现在我们来看看问题的选项吧。

①本文并未提到“‘我’的内部世界的意思就会改变”×

②本文并未提到“相对于他人，必然会把自己过度特权化”×

④本文并未提到“边界就成为一种共有的概念”×

⑤本文完全没讨论到“无法合理证明该内部世界里的自我意识本身就处于空间上的中心”等相关概念×

故正确答案为③。

问题5　请就这篇文章的论述方向，从选项①～⑤中挑选出最恰当的解释。

①首先，就单一个体与复数个体而言，在与环境交界面上的生命维持活动方面，阐明两者之间的差异。接着指出问题在于族群与自己的关系性。最后得出人类的自我意识只能存在于自己和他者的边界上的结论，并以将生命活动投影在物理空间上的方式加以论证。

②首先，以族群全体或家族全体等群体为对象，考察其在与环境交界面上的生命维持活动。接着指出个体面对群体的关系会增加其复杂度。最后提到不仅是个体与个体之间，连个体在群体之中也同样存在于与他者的边界上，并将此意识为所谓的自己，对此结论加以验证。

③首先，直接阐明所有生物都在其与环境的交界面上，通过保持最适当的距离来维系生命的结论。接着将开头的结论分别套用在个体和群体的情况下加以验证。最后，提出对生命在个体与环境边界上的活动观察，并再度呼应至开头的结论。

④首先，分别以个体和群体为对象，考察其在与环境交界面上的生命维持活动。接着指出人类和其他生物相较之下，自我意识的存在会使群体和个体间的关系恶化。最后推导出人类会在意识到边界的同时产生自我意识，并在边界上进行生命行为的

结论。

⑤首先，针对在与环境交界面上的生命维持活动，提出该边界上究竟存在着什么样的问题。接着为了将问题简单化而着眼于自我意识的存在。最后推导出“我”、“我们”人类和所有生物，都只能在这个边界之处让生命活动完整成形的结论。

我会主张语文能力是数学能力的源泉，其中的依据就是“抓住重点”的能力是重要的语文能力之一。将多余的细节去除并掌握大方向，是一种整理信息（第三章的第①方面）的能力，也是一种捕捉本质的抽象化能力。

接下来，让我们参考截至上一题为止的内容，分别汇总一下每一段的重点吧。

第一段　所有生物都会在其与环境的交界面上进行维持生命的活动。

第二段　每个个体都会在与同物种其他个体或他种个体的竞争关系中采取追求生存的行动。

第三段　有时复数个体也会被视为“单一”个体。

第四段　人类以外的动物不会出现个别行动破坏全体秩序的现象。

第五段　人类在自我意识下采取的个别行动有可能破坏全体秩序。

第六段　作为进化产物的自我意识与维持生命的群体行动相互对立，是人类特有的悲剧。

第七段　人类的“我”是一个“特殊点”，具有独一无二的特权性意义。

第八段　“我”作为圆的中心，既是“内”也是边界本身。

第九段　人类因为意识到边界而产生“自我意识”。

第十段　所有边界上都有生命迹象和生命活动。

这一题其实不用检验其他选项也知道，正确答案是④。

发现自己的数学力

怎么样？经过以上的解题过程，很多人应该说：

“不用这么刻意思考也答得出来啊。”

“真是多此一举。”

但反过来说，这正证明了你其实早已具备数学力。此外，那些从没意识到这种解题法的人可以试着回想一下，你在学生时期是不是明明很擅长语文，成绩却老是起伏不定呢？如果你从没意识到自己的数学力，那么即使你在无意识间用了逻辑思维进行思考，你也会以为自己只是按照直觉去解题罢了。

我们先来聊聊另一个话题。不知道你有没有听过斋藤秀雄这号人物呢？他是著名指挥家小泽征尔的老师，也是培养出山本直纯、岩城宏之、若杉弘、井上道义、秋山和庆和饭守泰次郎等杰出指挥家的名师。

这位斋藤老师所发明的“斋藤指挥法”，如今已以“Saito-method”之名普及至全世界的音乐学校，对于有志成为指挥家的人来说，是必学的经典教材。为什么斋藤指挥法能够成为全世界的标准呢？事实上，该指挥法本身几乎没有任何超群或独特

之处。斋藤指挥法最划时代的创举，就是把以往指挥家几乎没意识到的手臂动作，赋予“拍”“弹”“平均运动”等名称，让指挥者意识到这些动作。如此一来，指挥者即可意识到自己的手臂如何运动，并得以明确地理解这个动作所传达的意思。以结果来说，乐手也可以理解指挥家的意图，因此斋藤指挥法便以“简单易懂的指挥法”确立了世界级的地位。

同理，如果能够清楚意识到过去在无意识中使用的数学力，你就能更切实、迅速地解析出最终的答案。

下一章将进入的主题是：究竟什么是数学力。

第2章 什么是数学力？

算术与数学是两码事

请问，当你听到“数学力”这个词时，会联想到什么呢？我想应该有很多人会朝比较笼统的方向去想，比如说：

- 能够快速且正确计算的能力
- 能够快速解答应用题的能力
- 能够快速解答数学谜题的能力

不过我认为这些能力跟数学力都没有关系。

每次跟几个朋友去吃饭，如果是AA制，总会有人问我："永野，一个人平摊多少钱？"

此时我都会一阵心虚。朋友会这样问我，是因为他们觉得我是数学老师，心算肯定很厉害，但其实我算错的几率相当高。是的，我必须厚颜无耻地自首，我一点儿也不擅长心算……更确切地说，我本来就不太会算数。如果现在正在读这本书的你是我的朋友的话，请你以后别再让我心算了，每次算错时，你们那冷冰冰的眼神实在很伤人（泪）。

虽然听起来很像在找借口，不过数学能力其实并不等于计算能力。我知道的极为优秀的数学家或科学家当中，也有不擅长计算的人，甚至在我的印象中，这样的人也不在少数。当然我并不打算对我差劲的计算能力置之不理，毕竟作为一名数学老师，理当持续锻炼计算能力，以减少授课时出现计算错误的情况。不过我认为计算能力并不是必备的能力，尤其对成年人来说更是如此，因为现在随便都能买到计算器了，而且只要有智能手机的语音识别功能，光靠一张嘴也能知道计算的结果。

那么"快速解答应用题的能力"又如何呢？其实这也不足以说明一个人是否具备数学力。因为只要多接触各种题型，懂得将问题分门别类，然后套用既定的解法，就能够快速解答应用题……啊，我这样说好像有点儿太武断了，不好意思啊，但数学本来就不是一门讲求"速度"的学问。比如说著名的费马定理就是经过约350年的漫长光阴后，才终于被证明出来，期间应该有无数的数学家终其一生尝试证明此原理吧。那些无名的数学天才之所以能称得上是数学家，并不是因为他们能够迅速找出答案，而是因为他们拥有不屈不挠的精神，不超越前人绝不放弃。如果说费马定理这个例子太极端的话，那么1988年东大入学考试中出现的"传说中的难题"（与正

四面体的正射影有关的问题），当时各补习班以最快速度公布的“最佳解答”也都大相径庭，类似这样的题目也几乎不可能“快速解答”。

另一方面，将已知的题型分门别类并加以解析，是计算机最擅长的工作之一，因此拥有这项能力的人在步入社会以后，并不会像学生时期那样受到肯定。我们人类所需具备的能力，是针对那些尚未建立算法（处理方式）的未知问题提出解答方案，即使无法解答也要找出解答的方向。这才是真正的数学力。

在现在这个信息化社会，任何事情都讲求速度。人们很容易认为能够立刻解答问题的人就是“聪明”的人。不过事实真是如此吗？如果把世界上存在的各种可能性都纳入考虑范围的话，肯定有很多问题是无法立刻解答的。

而实际站上教学第一线以后，我发现，不知道是不是因为孩子们在答题时向来被要求速度，所以大家越来越不习惯思考了。这是一件非常严重的事。我认为比起快速作答，深思熟虑更值得获得鼓励。

我有一位朋友T君，当年以“筑驹（筑波大学附属驹场高等学校）有史以来最顶尖的天才”之称进入东大。我和他相识于东大歌剧团，一年级的时候共同担任该社团的公关的职务。这位T君在我和他共同执行社团工作的过程中，真的非常“深思熟虑”。比如说，当我们要给各大学寄明信片通知演奏会的消息时，我只会直接提议：

“反正只要有可能会来的，我们就全部都寄不就好了吗？”

但他却会针对每一所学校，仔细思考每张明信片的邮资是否真的能发挥相应的效果：

“这所大学虽然有名为歌剧团的社团，但实际上却是玩音乐剧的……”

因此，我原本以为可以在五分钟内解决的事情，却花了将近一个小时才完成，不过最后的结果当然是取得了相当不错的效益。而且因为我们已经将资料整理在当时尚未普及的电子表格软件内，所以从第二次开始，我们俩甚至不需要碰面就可以迅速完成作业。妄下定论与数学力恰好是相对的，必要时花点儿时间耐心思考，是培养数学逻辑思维的重要方式。

接下来，我们继续看第三点“能够快速解答数学谜题的能力”吧。全日本最优秀的数学教师之一的安田亨老师，在《东大数学多拿一分的方法：理科篇》一书中提到：

“头脑能够放入数学性事实的容量大小，是‘数学好不好’的重要原因之一。优秀的人脑中都有‘抽屉’，可以整齐地排列顺序，即使情况稍微复杂也不至于造成混乱。数学性的一步，步伐是很大的，但不擅长数学的人，容量通常很小，因此习惯一味地把眼前的事物化为公式，无视整体，只计算眼前的问题。”

这和我在教授数学时实际感受到的情况几乎一模一样。

一般来说，擅长数学的人都具有一种优秀的能力，称作“逻辑性的勇气”。即使站在看不见终点的入口，也有勇气朝着自己认为正确的方向前进。反之，不擅长数学的人只要站在看不见终点的入口，就很容易怯懦地认为“我恐怕做不到”而选择放弃。

举例来说，擅长数学的人在操作一台无法靠直觉理解的机器时，会靠着说明书彻底了解其功能；而不擅长数学的人大多下意识地排斥没有说明书就无法理解的机器，宁可选择像是iPhone或iPad等产品。当然，拥有优秀的直觉能力是一件很棒的事，

能够迅速掌握别人需要花时间才能理解的事情，是一项不得了的才能。而且iPhone和iPad能够广受全世界欢迎最重要原因之一，就是来自它在操作上的直觉性，不过这却与数学所追求的目标完全相反。

能够以惊人的速度解开智力测验或数独的人，任谁都会觉得“头脑真好”吧。事实上，那些人具备了灵活的想象力和直觉力（我就没有这种天赋），而许多人也会因此以为“拥有直觉的人就是擅长数学的人，没有直觉的人就是不擅长数学的人。”

但这个观念其实大错特错。来自上天启示般的突发奇想，甚至连自己都不知道为什么会有这种念头的“直觉”，和数学力一点儿关系也没有。如果这种东西就叫作数学力的话，那我只能说几乎所有人都没有必要学数学了。至少，要在大学的入学考试中合格，或是在工作、生活中需要靠数学思维来解决问题时，并不需要什么特别的“直觉”，所以各位可以放心了。我们真正需要的并不是通过“直觉”比别人早一步找出答案的能力，而是无论碰到多么困难的问题，都能够一步一步以逻辑思维找到正确答案的能力。

“滴水穿石靠的不是蛮力，而是持之以恒。”

这是古罗马哲学家卢克莱修（Titus Lucretius Carus）的名言。我认为这种滴水穿石的持续力，才是真正的数学力。

能够快速计算、能够按照题型正确解答应用题和擅长解答数学谜题（图形问题），都是算术当中相当重要的能力。没错，本节开头提到的三种能力并非数学力，而是“算术力”。从小学升上初中时，虽然面对的同样是数学算式，但科目名称却从“算术”改成“数学”（编者注：此指日本的情形），原因并不是为了让你体验到长大的滋味（笑）。算术和数学是两种貌同实异的学问。说得极端一点，算术是

一门磨炼你如何“迅速且正确解答已知问题能力”的科目，数学则是一门“培养你解答未知问题能力”的科目。

算术力与我们的生活息息相关。凡是买东西时可以立刻算出该找多少零钱、理解股价指数的意义或是光靠不动产的广告就能对房屋的大小一目了然等，这些绝对都是生活中不可或缺的能力。不过数学所追求的并不是要我们能够迅速解答这种早已经有固定答案的问题。

任何人都具备的数学力

每次用问卷调查的方式统计小学生最喜欢的科目时，数学和体育总是榜上有名。然而如果调查对象换成高中生的话，喜欢数学的人的比例绝对不高，反而永远稳居最讨厌科目的第一名（泪）。说起来实在可惜，但各位是不是也跟我一样，切身感受到世界上真的有很多讨厌数学的人呢？明明小学时数学这么受欢迎，为什么到了高中就反而讨人厌了呢？

用典型解法破解典型问题的小学数学，就像依照攻略的指示玩游戏一样。读了电玩游戏攻略上写的“往右边走有宝物”，按照指示就能获得宝物，这种喜悦是理所当然的。再者，游戏玩得好并不会获得大人的赞赏，而只要按照课堂上学到的方式在数学考试中取得高分，就能获得父母或老师的嘉奖，所以这当然是一件很开心的事。

然而升上初中后，状况可就不一样了。即使像小学一样，用同样的原则背诵解法，但是真正上了考场，也不一定能拿到高分，因为初中数学有很多题目光靠死记硬背是无法解决的，而且这种现象会随着年级的增加越来越明显。其实最后会对数学感到厌倦的人，一开始也曾经做过一番努力。如果做了两遍练习题，成绩还是不见起

色的话，下一次就做三遍吧，做了三遍还是不行，下次就做四遍……可是成绩依然没有进步，努力得不到回报。另一方面，英语和历史等科目，通常只要稍微努力就能获得一定的成果。碰到这种情况，任谁都会心想："也许我就是没有数学天分吧……"到最后会对数学感到厌倦，似乎也是情理之中的事。

近20年来，我累积了许多一对一指导数学的经验，对象大多是无法通过大班授课提高成绩的学生——简而言之，就是不擅长数学的人。就这一层意义而言，我过去的指导经验可以说是每天在与不擅长数学的学生"格斗"。而我在此必须肯定地说一句：数学力是任何人都拥有的能力。数学不好的人，并不是因为没有数学天分，而是因为用了学习算术的方法来学习数学。事实上，在我的补习班里，很多一开始在班上落后的学生，后来都在短时间内进步到班上的前几名（抱歉，我无意在此给我的补习班做宣传）。为什么会发生这种事呢？因为我的指导很厉害吗？不不不，绝对没有这种事。我所做的只是让学生停止死记硬背，尝试理解各单元的内容、公式和解法的意思，然后练习如何用稍微有别于以往的视角解读数学而已。如此一来，学生（尤其是语文能力优秀的学生）就会发现，解数学题并不需要特别的天分，只要使用自己原本就具备的能力即可。

我在第一章用阅读测验示范如何以数学式的方式解题，就是为了让各位读者注意到你本身其实早已具备了数学力。

提升数学力的秘诀就是"停止背诵"

因为工作的关系，我时常被人问到这样的问题：

"如何才能学好数学呢？"

这时我都会回答：

“不要死记硬背。”

下一秒钟，对话一定会进入一段很奇妙的空白（笑）。毕竟那些不擅长数学的学生，大多认为学习数学就是死记公式和解法，所以这是正常现象。但从我过去的指导经验中，我很确定学习数学绝对不是死记硬背，反而越是死记公式或解法，越学不好，然后就会觉得数学很无聊，最后开始讨厌数学。

为什么会这样呢？

正如前文所述，我们学习数学的目的是培养逻辑思维。数学当中出现的函数、方程、向量和数列等，都只是用来培养逻辑思维的工具而已，而逻辑思维的锻炼只能靠我们用自己的头脑进行。对于似懂非懂的学问，如果从头到尾只打算死记硬背的话，等于是在拒绝思考。不用我说大家也知道，这绝对是养成逻辑思维的一大阻碍。

学好数学最应该具备的态度就是思考“为什么”，这也是学习数学的起点。

举个例子好了。吉卜力工作室的电影《儿时的点点滴滴》（编注：高田勋导演，又名《岁月的童话》）当中，有一段很经典的片段，是小学五年级的主角妙子，在向高中生的姐姐请教分数的除法。

妙子：“什么叫作‘用分数除分数’啊？”

姐姐：“什么？”

妙子：“$\frac{2}{3}$个苹果除以$\frac{1}{4}$，意思是不是就是把$\frac{2}{3}$个苹果平均分给4个人，看每个人拿到的苹果呢？”

姐姐：“嗯？嗯……”

妙子：“所以（一边画苹果一边想）1、2、3、4、5、6，每个人有$\frac{1}{6}$个。”

姐姐：“不对不对！你那是乘法！”

妙子：“为什么？如果是乘法的话，为什么数字会变少？”

姐姐：“把$\frac{2}{3}$个苹果除以$\frac{1}{4}$的意思是……（词穷）总之！你一直在讲苹果，害我搞不清楚啦！乘法就直接乘！除法就是把后面分数的分子分母颠倒过来的乘法，这样记就可以了！”

这段场景简直就是数学负面教育的缩影，虽然只有短短几句对话，却让我印象深刻。看过这部电影的人，想到自己也跟妙子的姐姐一样，无法说清楚分数的除法，恐怕也会面露苦笑吧。不过在小学数学中，并不需要解释为什么“分数的除法要颠倒分子分母”。正如前文所述，小学数学的学习目标是为了在日常生活中迅速计算出正确的答案，因此只要记住算法，然后按照规则计算即可。

但是，如果从数学式思考的角度检验分数的计算，就有必要清楚说明“为什么按照那种方式计算就能得到答案”，因为比起答案本身，学数学时更重要的是解答的过程。从这点来看，妙子可以说是充分具备学习数学的素养。

机会难得，我想在此解释一下“分数的除法要颠倒分子分母”的理由。如果对这部分没兴趣的朋友，接下来这几页内容可以直接跳过。

为什么分数的除法要颠倒过来？

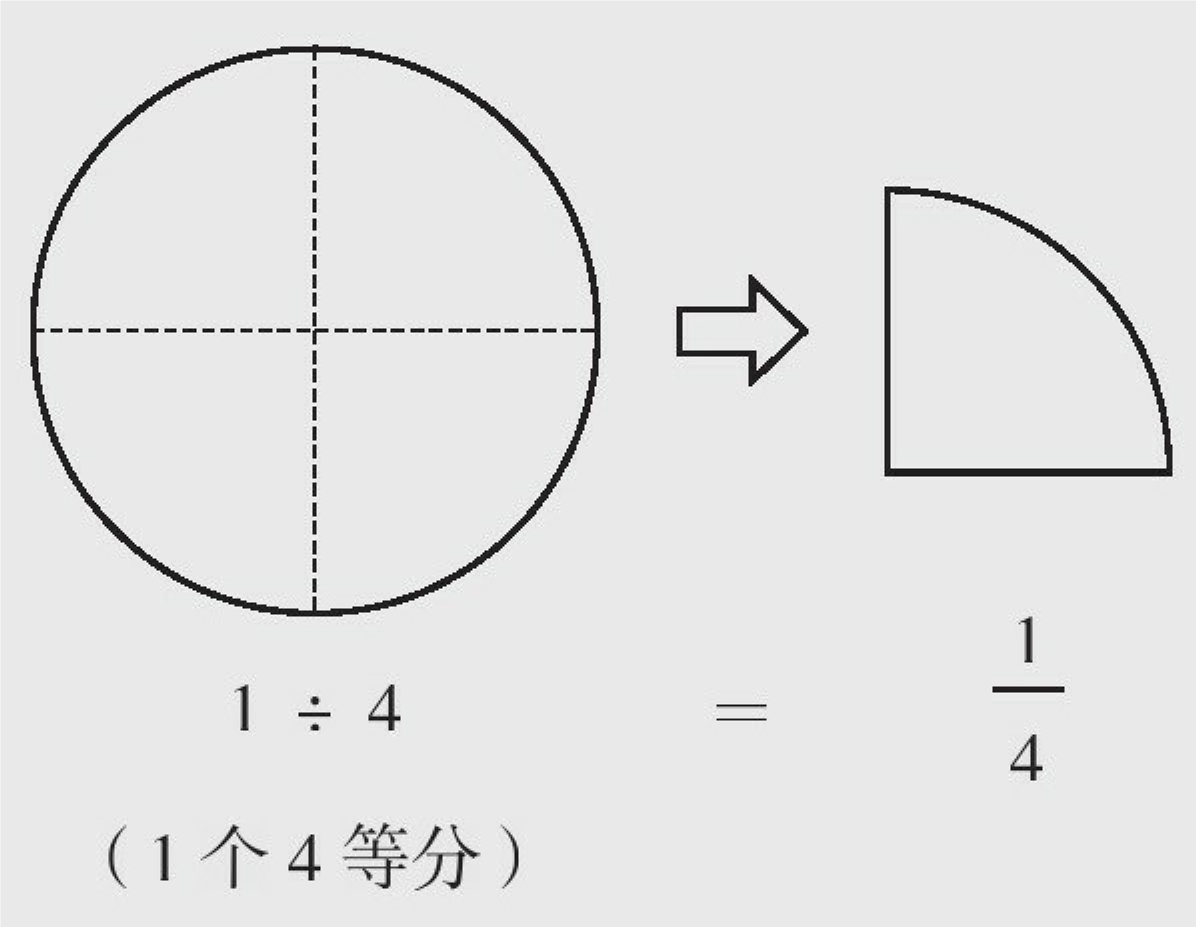
分数究竟是什么？

说起来，分数究竟代表什么意思呢？看到这里，你可能会想：“不会吧？要从头开始解释吗？”但是，当我们在数学上遇到不懂的概念时，“追本溯源”是非常重要的一件事。所以接下来，请耐心地跟我一起探究其中的学问吧。

假设现在我们要计算：

1÷4

这个算式的意思就是“把1个东西分成4等份以后的其中1份”，没错吧？不过，由于我们无法用整数表示计算的结果，所以就把计算的结果写成 $\frac{1}{4}$ 。



如果把过程公式化的话，就会是这样：

把1个东西分成n等份以后的其中一份就是 $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$

这就是分数的定义。用数学式表示的话，就是：

$$1 \div n = \frac{1}{n}$$

没错吧？

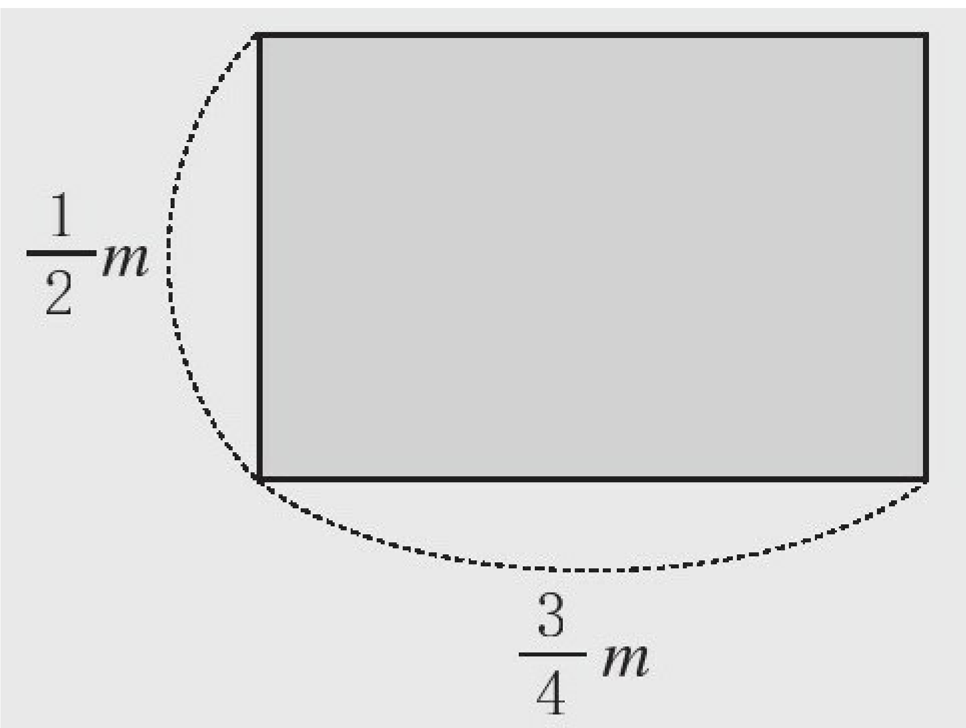
分数的乘法

接下来，我们同样来确认一下分数的乘法。假如题目是：

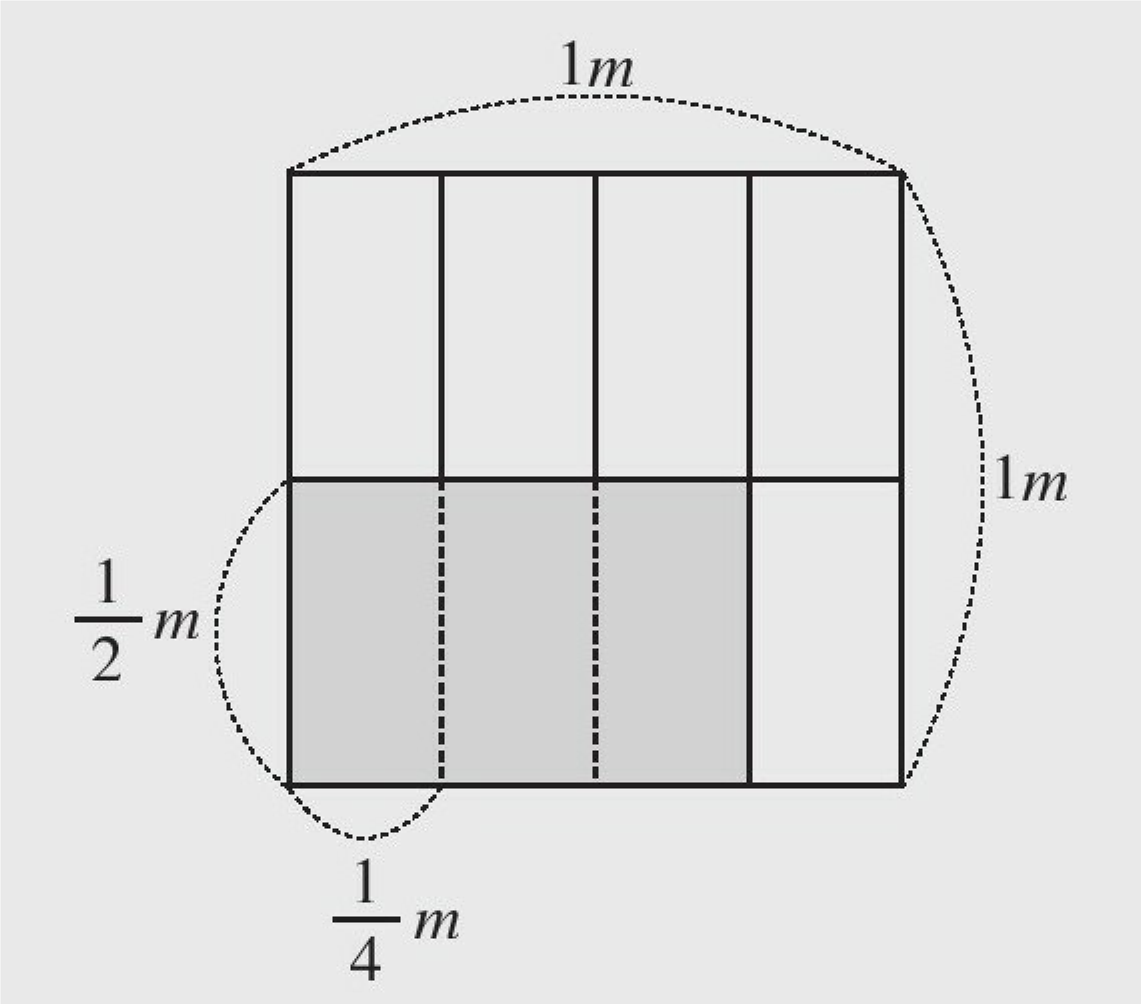
$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

请问其中的意义又该如何解读呢？

为了利用视觉帮助理解，我们来想想长方形的面积吧。如果把 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ 想成是一个长 $\frac{1}{2}$ m、宽 $\frac{3}{4}m$ 的长方形，并用面积来表示的话，就会得到下图的长方形：



试着把这个长方形放进1m×1m的正方形里。



结果我们可以看到，灰色的长方形相当于正方形纵切4等份、横切2等份后的其中3块。由于纵切4等份、横切2等份以后，整个正方形会变成8等份，因此灰色长方形的面积就等于3个$\frac{1}{8}$。也就是：

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}(m^2)$$

换句话说：

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

没错吧？这也就表示这道题目可以这样计算：

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

所以结论就是，分数的乘法只要用分母乘分母、分子乘分子，即可得出答案。

这同样也可以用一般化的数学式表示：

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = \frac{a \times p}{b \times q}$$

用分数除以分数是什么意思？

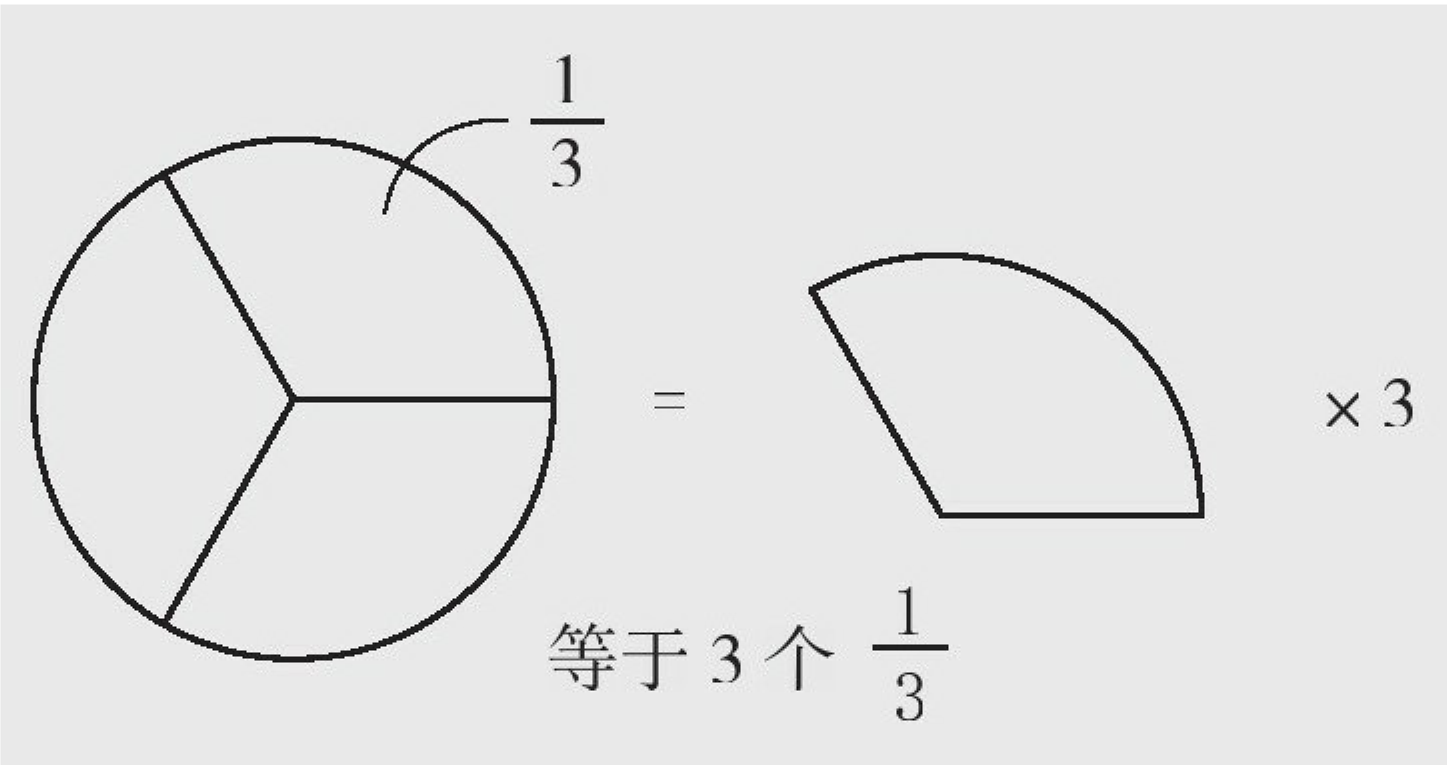
在我们开始计算分数除以分数之前，先来思考以下这个算式的意思：

$$1 \div \frac{1}{3}$$

如果把它想成“把1分成 $\frac{1}{3}$ 等份”的话，头脑应该会觉得很混乱吧。这里我们可以

采用除法的另一种含义，就是“把1以 $\frac{1}{3}$ 为单位来分，总共会得到几个 $\frac{1}{3}$ （1是由几个 $\frac{1}{3}$ 所组成）？”

画成图的话就是：



所以答案就是3对吧？亦即：

$$1 \div \frac{1}{3} = 3$$

用一般化的数学式表示的话就是：

$$1 \div \frac{1}{n} = n$$

以上是理解分数除以分数前必备的分数“基础”。

分数的基础

$$（\mathrm{i}）\quad 1 \div n = \frac{1}{\mathrm{n}}$$

$$（\mathrm{ii}）\frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = \frac{a \times p}{b \times q}$$

$$（\mathrm{iii}）\quad 1 \div \frac{1}{n} = n$$

好了，我们现在终于可以开始解答妙子的疑问了。她的问题是：

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$$

没错吧？首先，我们用基础（ii）来分解算式。然后再套用基础（iii）的概念。

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} &= \frac{2\times 1}{3\times 1} \div \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} \div \frac{1}{4} && \text{基础（ii）} \\
&= \frac{2}{3} \times 1 \div \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{3} \times 4 && \text{基础（iii）} \\
&= \underline{\frac{2}{3} \times \frac{4}{1}}
\end{aligned}
$$

看到了吗？从第一个和最后一个算式可知，只要把除数上下颠倒，然后与被除数相乘，即可得出答案。

另外，即使分子不是1，我们也可以用下面这种思考方式推知，分数相除时只要把除数颠倒过来与被除数相乘即可。

$$
\begin{aligned}
\text{（例）}\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} &= \frac{3}{5} \div \left(\frac{1}{7} \times \frac{2}{1}\right) && \text{基础（注）}\\
&= \frac{3}{5} \times 1 \div \frac{1}{7} \div \frac{2}{1} && \text{基础（iii）}\\
&= \frac{3}{5} \times 7 \div 2 \\
&= \frac{3}{5} \times 7 \times 1 \div 2 && \text{基础（ i ）}\\
&= \frac{3}{5} \times 7 \times \frac{1}{2} \\
&= \underline{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}
\end{aligned}
$$

注：（ ）前为÷时要特别注意。

24÷（2×3）=24÷2÷3

小心不要误写成“24÷（2×3）=24÷2×3”。此外，我在此处适度省略了用基础（ii）分解或重新写成分数的步骤。

怎么样？像这样回到分数的起源，一步一步仔细推敲，就能清楚说明为什么“分数的除法要颠倒分子分母相乘”了。光是把“分数的除法要上下颠倒”当作一项知识，顶多只称得上是算术的技巧而已，不过一旦将焦点放在“为什么这样可以得到

答案”上，即使是分数的除法也能够成为锻炼逻辑力的材料。也就是说，这才是标准的数学。容我再啰嗦一次，为了达成数学最初的目的——锻炼逻辑思维，最重要的一点就是不要死记硬背。

好了，看到这里，你或许会想：

“现在说这些都为时已晚了。”

或者也有人绝望地认为：

“从现在开始重新学数学恐怕有一段很长的路要走吧。”

别担心！本书并不会要求你重新学习数学。我希望尽量通过文字而非算式，让你了解在初、高中阶段的数学学习中，究竟学到了什么东西，如果用前文引用的爱因斯坦的话来说，就是你在忘记所有学习过的数学内容之后，留下来的数学式思维究竟是一种什么样的能力。

“如果这样的话，一开始就别学什么数学不就好了吗？”

我想有人可能会这么说。确实是这样没错。可是为了让人生经验不足、尚未有足够语言表达能力的学生培养逻辑思维，学好数学绝对是最快速而有效的方法。

我假设本书的读者都已经是在社会上摸爬滚打，能够独当一面的成年人，他们人生经验丰富、语言表达能力充足、善于以抽象概念思考事情，所以我才敢这样大胆地尝试。

请善用成年人特有的优势，有效地将数学力化为你的助力吧。

让“灵光一闪”成为必然现象

刚才我在前文中提到，“灵光一闪”跟数学力毫无关联。不过前述的“灵光一闪”指的是搞不清楚从何而来、真正意义上的灵光一闪。但是，一旦我们开始注意并清楚意识到沉睡在体内的数学力，过去那些只有在“状态好的时候”才想得到的好主意或事情的解决方法，就算状态再怎么不好，也会自然而然地迸发出来。换言之，那些在无意识时让人感觉只是灵光一闪的念头，将会成为一种必然的现象。

反过来说，其实一般人所谓的“灵光一闪”，对有意识地使用数学力的人来说，几乎都是理所当然的联想。每当福尔摩斯推理出意料之外的犯人时，周围的人都会大吃一惊。对旁人来说，拥有自己所没有的直觉，忍不住地对他肃然起敬，认为福尔摩斯就是天才。但福尔摩斯都是根据一项一项的证据，进行逻辑性的思考后，才一步一个脚印地追查出真正的犯人的。数学力所赋予人们的逻辑思维能力，就拥有这么强大的功能。

好了，从下一章开始，我将从七个方面剖析数学力的本质。请放松你的肩膀，保持愉快的心情，跟我一起进入下个单元吧！

第3章 数理性思维的七个方面

从这一章开始，我们将具体地来了解何谓“数学式思维”。正如前文所述，这其中

并没有什么别出心裁的思考方式。我想即使是你，几乎也在无意识之中使用过这些思维方式。但是通过了解并意识到数学式思维的意义，相信你未来在碰到任何问题时，都能够比以往更容易也更切实地理出解决问题的头绪。

接下来，请从以下介绍的七个方面，挖掘出潜藏在你体内的数学力吧！

第①方面 整理

·整理的目的在于获得新信息

这里所谓的整理，并不是单纯地把东西收拾整齐。

“为什么把东西收拾整齐就不算‘数学式思维’呢？”

会这么想也是理所当然的。不过我也认为，如果只是把东西收拾整齐的话，并没有必要冠上“数学式思维”的名义。在整理房间这件事上，任何一个整理达人的专业程度绝对都比我可靠得多。我所强调的“数学式的整理”，并非普通意义上的整理，而是一种“把隐藏的信息推理出来”的行为，也就是通过明确的规则加以分类、运用算数方法等原则加以整理、检查的行为。通过数学式的整理，我们可以把信息归纳得井然有序，但这并非整理的目的。获得“新信息”，才是所谓数学式整理的最终目的。

通过分类推理出隐藏性质

举例来说，假设你是一名葡萄酒收藏家，家里有超过300瓶你中意的葡萄酒。请问，以下A～C三种整理方法，哪一个最符合“数学式的整理”呢？在思考这个问题时，可以从增加葡萄酒信息，即葡萄酒的味道的角度来思考。

A．按照酿酒年份（生产年份）排列

B．按照产地排列

C．按照葡萄品种排列

向人们展示自己收藏的葡萄酒时，A大概是最体面的排列方式了吧。一来，当人们看到排列在最前面的葡萄酒时，会很热情地赞叹道：“哇，这些酒有年头了啊。”二来，你也可以告诉客人：“这里也有你出生那一年产的葡萄酒哦。”这样他们听了可能会很感动。

不过按照生产年份排列葡萄酒，究竟可以得到什么新信息呢？顶多就是：“1990年产的酒好多哦。啊，不过1991年产的酒已经没了。”像这样掌握葡萄酒库存的状况而已。

相对地，B的整理方式可说是非常“数学式”，因为这样的整理方式，可以让你在开瓶前就推测到有关味道的信息。

在此我分享一件私事。我是一名经过日本侍酒师协会认证的葡萄酒专家。每次和知道我拥有这个执照的朋友去用餐时，选择葡萄酒的任务自然而然就落在我头上。通常我都会先确认众人的预算和餐点的内容，然后再从葡萄酒单中挑选葡萄酒。尽管我拥有专业执照，实际经验并不丰富，因为酒单上的葡萄酒，我喝过的只有极其少数而已，因此我总是挑选得有点儿随便。但是每次用完餐后，大家都会对我挑选的葡萄酒赞誉有加：“哎呀，每次跟永野来吃饭，都能喝到好喝的葡萄酒！”

这是为什么呢？因为我对各主要产地生产的葡萄品种和当地的气候条件，已经有一定程度的了解。光靠这一点，我就能够像这样做出选择：

“大家点了蒲烧鳗鱼吗？这样的话，还是选清爽一点儿的红酒好了。勃艮第看起来不错，不过价格有点儿超出预算了。啊，卢瓦尔地区的黑比诺应该可以，就选这个吧。”

顺带提一下，黑比诺葡萄是酿造勃艮第红酒的知名品种，我一开始去葡萄酒学校时，还不认识它，结果还把老师写在白板上的文字念成了“非比诺”，现在想起来实在很丢脸……

当然，严格说来，决定葡萄酒味道的因素不只有产地、品种和气候条件，连酿造方法、木桶种类、运送方式等都有影响。说得更深入一点儿，即使是同年同款的葡萄酒，只是瓶子不同，味道也会有些许差异。不过如果没有特别要求的话，像我这种选择方式其实不会造成太大的问题。

我想在此强调的当然不是我挑选葡萄酒的眼光有多好（笑），而是我只要从葡萄酒单上的产地分类，就能大致了解到那些没喝过的葡萄酒究竟是什么味道。也就是通过产地分类，成功推理出隐藏在其中的性质。

各位已经看出来了吧？如欲取得与葡萄酒味道有关的信息，比起按照年代顺序排列的A，按照产地排列的B绝对是更有效的整理方式。而且就取得有用信息这一点来看，B比A更符合数学式的整理。

那么，C的“按照葡萄品种排列”又如何呢？

确实，葡萄的品种会直接影响到葡萄酒的味道，而且知道品种的话，大概也可以推测到葡萄酒的味道，但就数学式分类的角度而言，我并不建议以葡萄的品种作为分类的标准。因为数学式分类除了着重在增加信息外，还有一件不得不注意的重点，就是“不遗漏、不重复”。如欲从分类取得味道的信息，以葡萄的品种为标准并非

不好，只是像波尔多等类型的葡萄酒，酿造时同时混合了不同品种的葡萄。由于一种葡萄酒里含有不同品种的葡萄，因此如果按照品种分类的话，同一瓶酒有可能被分在不同的类别下。况且，在琳琅满目的葡萄酒中，有时候也会出现非常稀有的葡萄品种。包括这类型的品种在内，要认识世界上所有的葡萄品种，几乎是天方夜谭。换言之，假如按照葡萄的品种分类，有可能会出现被分至多个类别下的葡萄酒，或是完全无法分类的葡萄酒。

最近的商业书籍，经常呼吁读者“分类时的标准要符合MECE”。MECE是Mutually Exclusive and Collectively Exhaustive的缩写，直译成中文就是“相互独立，完全穷尽”，因此所谓的MECE分类就是不重复且无遗漏的分类，这也是以数学式思维分析事物时的基本。此处虽以葡萄酒为例，但无论在生活的哪个方面，整理其实都是不可或缺的一环。过去你可能只是在无意间试着把事物排列整齐，但从今天开始，请你在整理时顺便想一想：

“该怎么做才能增加信息呢？”

在着手进行整理前先思考这个问题，就是标准的数学式思维。

为什么血型占卜这么受欢迎？

在联谊会等大家都是初次见面的场合，当不知道该聊什么话题时，总是会从血型或星座等话题切入。为什么这样呢？因为这些话题最安全也最能够炒热气氛，除这个原因，还有一个理由，就是人们想通过血型或星座，将眼前的人进行分类。例如：

A型：不苟言笑、处世周到、神经质

B型：自我中心、乐天、迟钝

O型：重义气、浪漫、不拘小节

AB型：冷酷、理智、优柔寡断

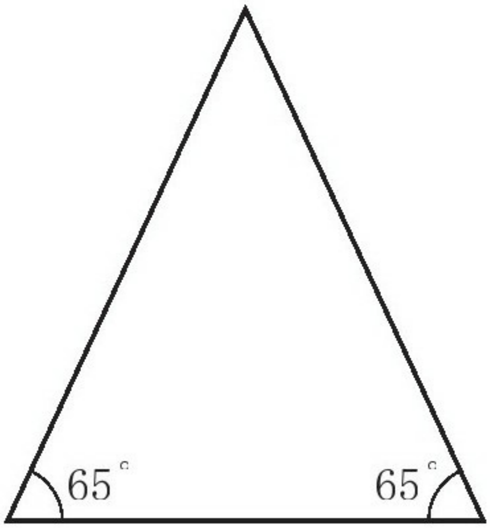
然后借此推测对方的性格。其实这种血型性格诊断毫无科学依据，也有一种说法是因为周围的人不断洗脑，才后天养成类似的性格，不过我们在这里就先不探讨这件事了。总之，联谊等场合会频繁出现血型和星座的话题，最主要的原因就是人们受到心理的驱使，试图通过分类来了解初次见面的人隐藏在表面下的真实性格。

学习“图形的特性”的理由

我在前文写过：“数学式分类，是能推理出隐藏性质的分类。”或许有人会问：“我以前学数学时，有学过这种分类法吗？”

当然有学过啦。请回想一下初中数学学的“图形的特性”。还记得以前学过的等腰三角形或平行四边形的特性，以及将这些图形进行分类的条件吗？只是长大以后我们没什么机会去判断一个图形究竟是不是平行四边形，尤其步入社会以后，除了解题之外，几乎不太会用到关于图形的知识或常识。那我们究竟为什么非得学习图形不可呢？那是因为图形的分类，正是一种能推理出隐藏性质的分类。

举例来说，当我们知道一个三角形的两个角相等时，这个三角形就会被归类为等腰三角形。同时我们也可以推知，这个三角形有两边等长的特性。除此之外，等腰三角形顶角的角平分线也是底边的垂直平分线。



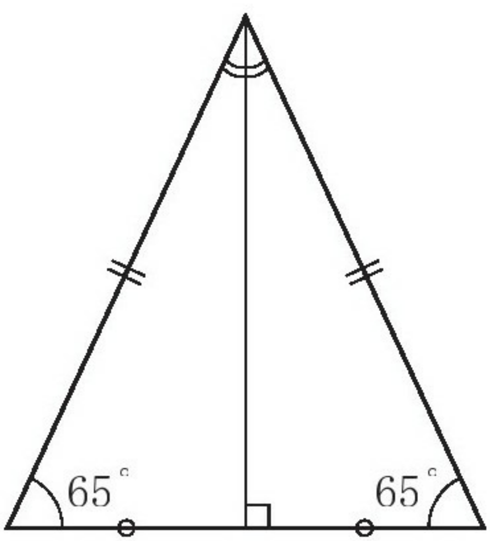
此三角形的底角相等

↓

可分类为等腰三角形

↓

两边等长
顶角的角平分线是底边的垂直平分线

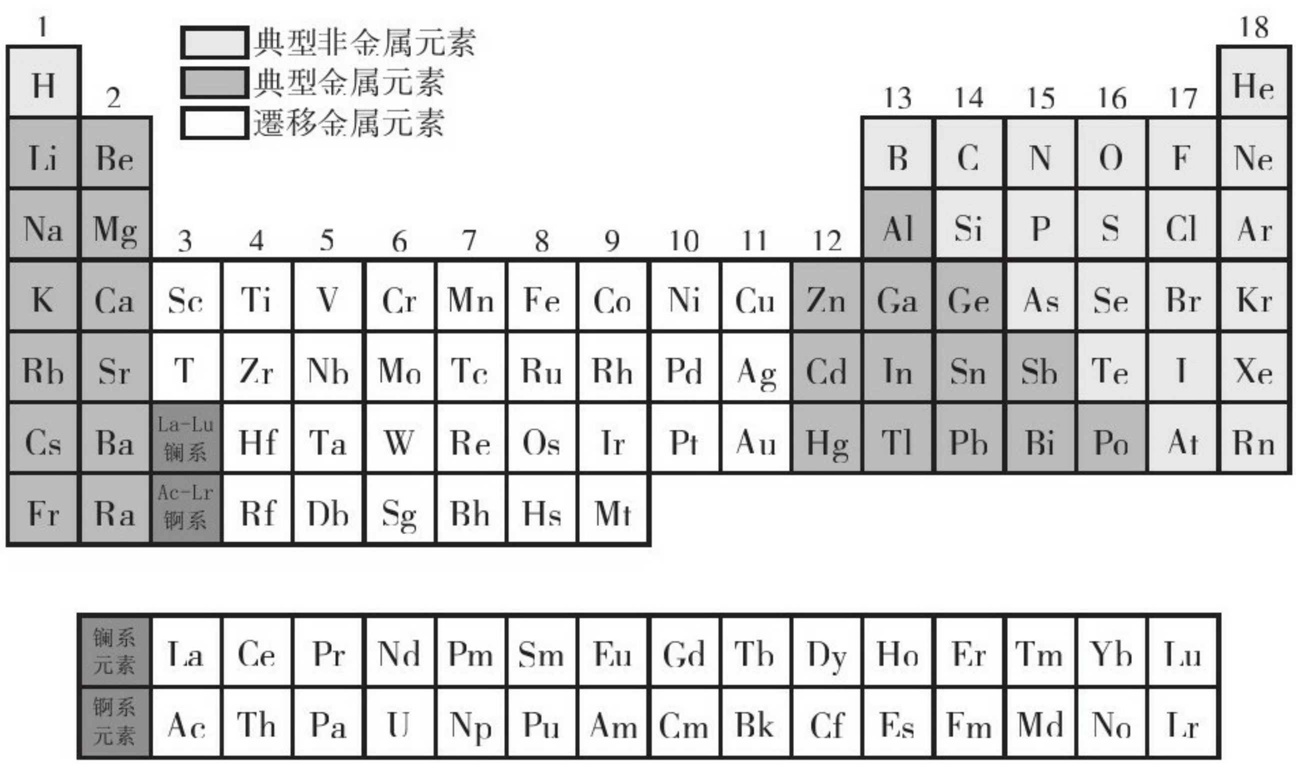


获得了更多的信息

这就跟用葡萄产地区分葡萄酒、根据血型区分不太熟悉的对象一样，都是通过分类的方式推理出隐藏的性质。重点在于思考该以什么作为分类的基准，才能够帮助我们推理出隐藏的性质。

在科学史上留下重要足迹的数学式分类

还记得化学课本中的“元素周期表”吗？元素周期表的分类是科学史上最伟大的成就之一，它长得就像下图这个样子。



元素周期表

若各位读者是学文科的，可能会想起一些不愉快的回忆，不过我们这里并不是要检测各位，所以还请放松心情继续阅读下去。

所谓的“元素”，指的是氧或氢等构成物质的基本成分。

人类自古以来一直在寻找形成万物根源的终极要素。例如，古希腊把“火、土、水、空气”视为构成万物的要素，并将这些要素称为“四大元素”；中国则把“木、火、土、金、水”五种基本物质视为“元素”，并据此形成阴阳五行思想。

中世纪的欧洲曾掀起一股炼金术热潮，元素发展史暂时走偏了方向（尽管实验技术等确实有所成长），直到17世纪，爱尔兰的罗伯特·波义耳（Robert Boyle）把元素定义为“无法再分解为更简单的物质的粒子”以后，才开启了18～19世纪的新元素发现潮。据说当时的科学家前赴后继地加入这场发现未知元素的竞争行列。

然而，随着越来越多的元素被发现，状况也越发混沌不明。一来，人们搞不清楚究竟共有多少元素，二来也不知道是否还有尚未被发现的元素。面对这样的情况，当时的一位科学家决定把元素进行分类。他就是俄罗斯的德米特里·门捷列夫（Dmitri Mendeleev）。门捷列夫在1869年的时候，将当时已被发现的63个元素，按照原子量（原子的质量）的顺序进行排列。

ОПЫТЪ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВЪ.

ОСНОВАННОЙ НА ИХЪ АТОМНОМЪ ВѢСѢ И ХИМИЧЕСКОМЪ СХОДСТВѢ.

			Ti = 50	Zr = 90	? = 180.
			V = 51	Nb = 94	Ta = 182.
			Cr = 52	Mo = 96	W = 186.
			Mn = 55	Rh = 104,4	Pt = 197,4.
			Fe = 56	Rn = 104,4	Ir = 198.
			Ni = Co = 59	Pl = 106,6	Os = 199.
H = 1			Cu = 63,4	Ag = 108	Hg = 200.
	Be = 9,4	Mg = 24	Zn = 65,2	Cd = 112	
	B = 11	Al = 27,4	? = 68	Ur = 116	Au = 197?
	C = 12	Si = 28	? = 70	Sn = 118	
	N = 14	P = 31	As = 75	Sb = 122	Bi = 210?
	O = 16	S = 32	Se = 79,4	Te = 128?	
	F = 19	Cl = 35,5	Br = 80	I = 127	
Li = 7	Na = 23	K = 39	Rb = 85,4	Cs = 133	Tl = 204.
		Ca = 40	Sr = 87,6	Ba = 137	Pb = 207.
		? = 45	Ce = 92		
		?Er = 56	La = 94		
		?Yt = 60	Di = 95		
		?In = 75,6	Th = 118?		

Д. Менделѣевъ

门捷列夫最初完成的周期表

结果他发现，周期表上每隔一段固定的间隔，就会出现性质类似的元素，例如氟和氯、钠和钾等等。这是一项划时代的惊人发现，因为当这些杂乱无章的元素被分为几组类型，并像这样加以整理后，尚未找到对应元素的部分（图表中标“？”的部分）也清楚地浮现了出来。

而且故事到这里还没结束。门捷列夫虽然通过按照原子量排序元素的整理方式，发现了元素的周期性，却不知道其中的原因。解开这个谜题的人，是出生于1887年的年轻英国科学家亨利·莫斯莱（Henry Moseley）。他在研究X射线和原子序数（按照原子量排列的序号）关系的过程中，得出“原子序数就是原子核正电荷数（质子数）”的结论。莫斯莱不仅借此说明了元素的周期性，更准确预言了尚未被发现的元素。

接下来是一段小小的题外话。这位年轻的天才在27岁那年，不幸战死于第一次世界大战中。虽然莫斯莱的研究绝对有资格让他获得诺贝尔奖的殊荣，但由于自然科学领域的诺贝尔奖规定获奖者必须以在世的人为限，因此命丧沙场的莫斯莱就这样与诺贝尔奖擦身而过，他的名字从此被埋没在历史的洪流中。后来以元素的研究享誉国际的法国科学家乔治·于尔班（Georges Urbain）曾用下面这段话褒赞莫斯莱：

“莫斯莱定律是史上难得一见的重要发现，因为他把门捷列夫稍显空想的元素分类，用科学方式置换为正确的结果。”

总而言之，其中非常显而易见的事实就是，将元素按质量排序的整理方式，不仅帮助我们发现了元素的周期性和未知的元素，还让我们进一步发现了原子序数和原子核电荷之间的关系。“通过整理和分类推理出隐藏的性质”，就这一点来说，我认为元素周期表成功诠释了整理所带来的重大成果。

乘法式整理

截至目前为止，我们已经接触过各式各样整理东西的“分类”法，但数学教会我们的整理，绝对不是只有分类而已。除了把散乱的东西排列整齐的“整理”，数学也教会了我们许多别的东西。不过接下来的重点还是在于如何通过整理增加手边的信息，秘诀就藏在“和”与“积”的信息量差异中。

何谓“和与积的信息量差异”？

假设现在有A和B两个整数。我们来比较一下以下两个式子吧。

A+B=7……①

A×B=7……②

首先，从上面的式子中，我们可以观察出什么呢？式子①的A和B加起来是7，由此可知A和B的组合有无数组答案，可能是1和6、2和5、3和4、10和-3……

相对地，式子②又如何呢？由于A和B相乘等于7，因此可能的组合只有4种，即：

1和7、-1和-7、7和1、-7和-1

和的组合明显多于积的组合，但我们能因此断定前者所提供的信息较多吗？答案是否定的。因为我所谓的“信息”，指的是那些得到以后对我们有用的信息，那种只会造成混淆的无用信息反而越少越好（先前的葡萄酒例子也是，对我们有用的信息指的是跟味道有关的信息）。由于此题的目的是求得A和B的值，因此答案的组合越少，对我们越有利。换言之，我们可以说积提供的信息量比和多。

因此，研究数学的人在看到数学式时，总是惯性地想先把和变成积。

其实各位在初、高中时期进行的“魔鬼式练习”因式分解，就是一种典型的和变积形式。

举例来说，当我们碰到“x2+5x+6=0”这个一元二次方程时，会把它因式分解成：

x2+5x+6=（x+2）（x+3）

没错吧？（这里的因式分解只会用到这个程度而已，所以即使不会上面的式子变换也没关系。）接下来：

x2+5x+6=0

（x+2）（x+3）=0

当两数相乘等于零时，其中一数必定为零，所以：

（x+2）（x+3）=0

x+2=0或x+3=0

x=-2或x=-3

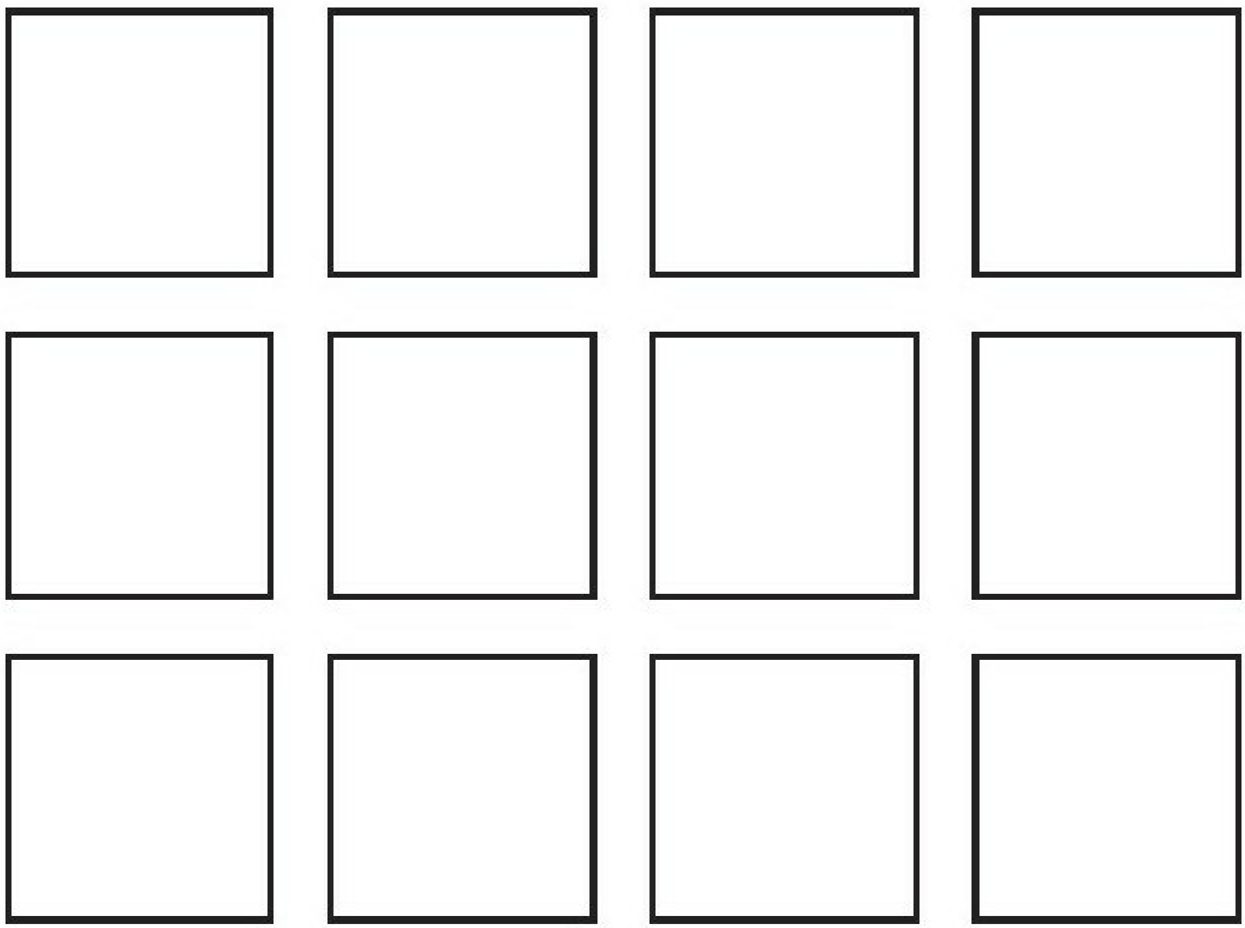
如此一来，答案就出来了！

学生时期的数学课会一而再、再而三地出现因式分解，目的并不是为了折磨各位，而是因为因式分解可以通过式子的变换提供更多有用的信息。

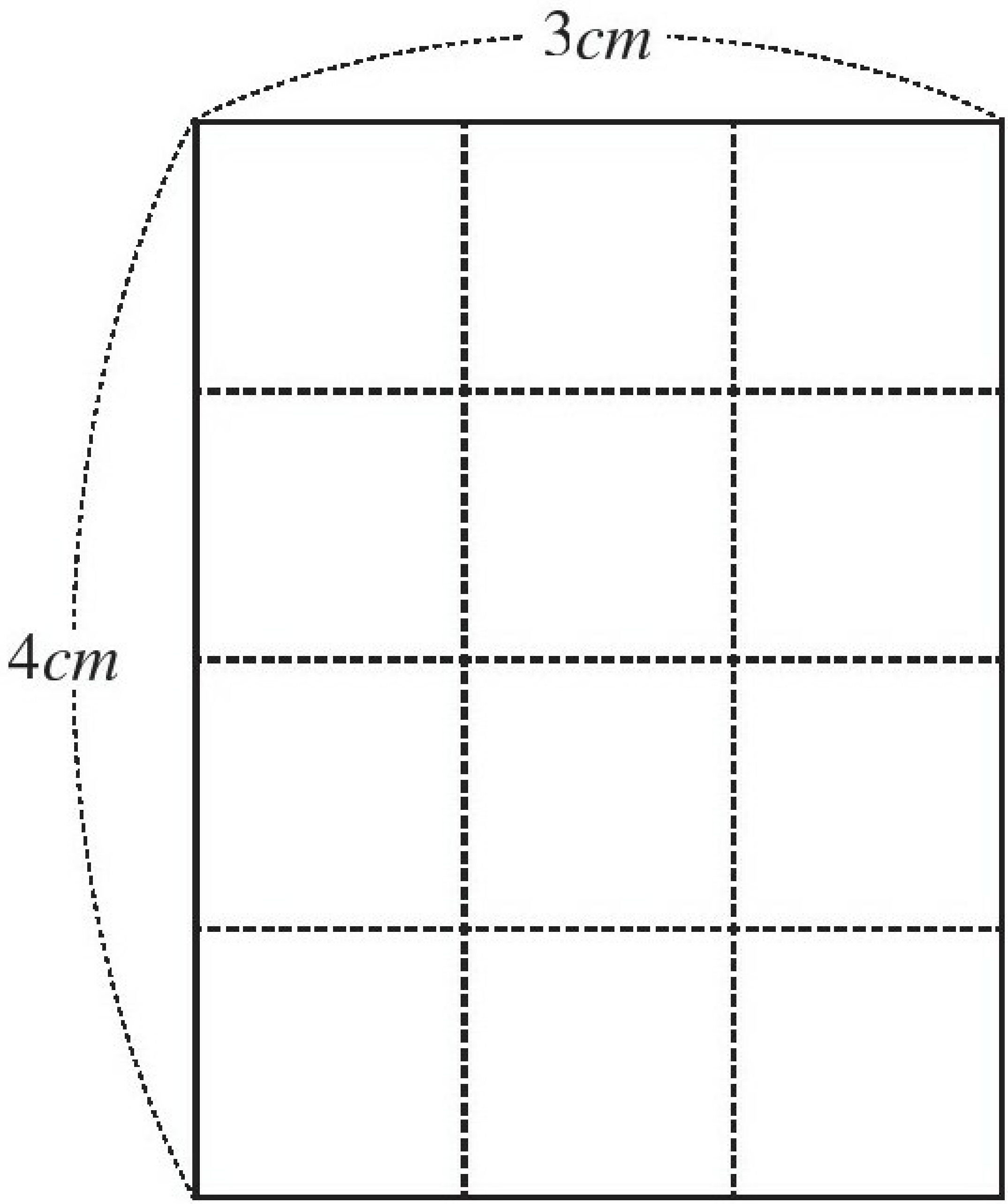
怎么样？经过以上的说明，你应该明白为什么乘法（积）所提供的信息量比加法

（和）多了吧？

话说回来，当你看到4×3这个算式时，会联想到什么呢？



是不是有很多人会联想到这种排列成3行4列，相当方便计算的方格呢？或许也有很多人联想到的是本质上跟这个（从计算1cm2正方形数量的角度来看）大同小异，看起来类似下面这种长方形的面积吧？



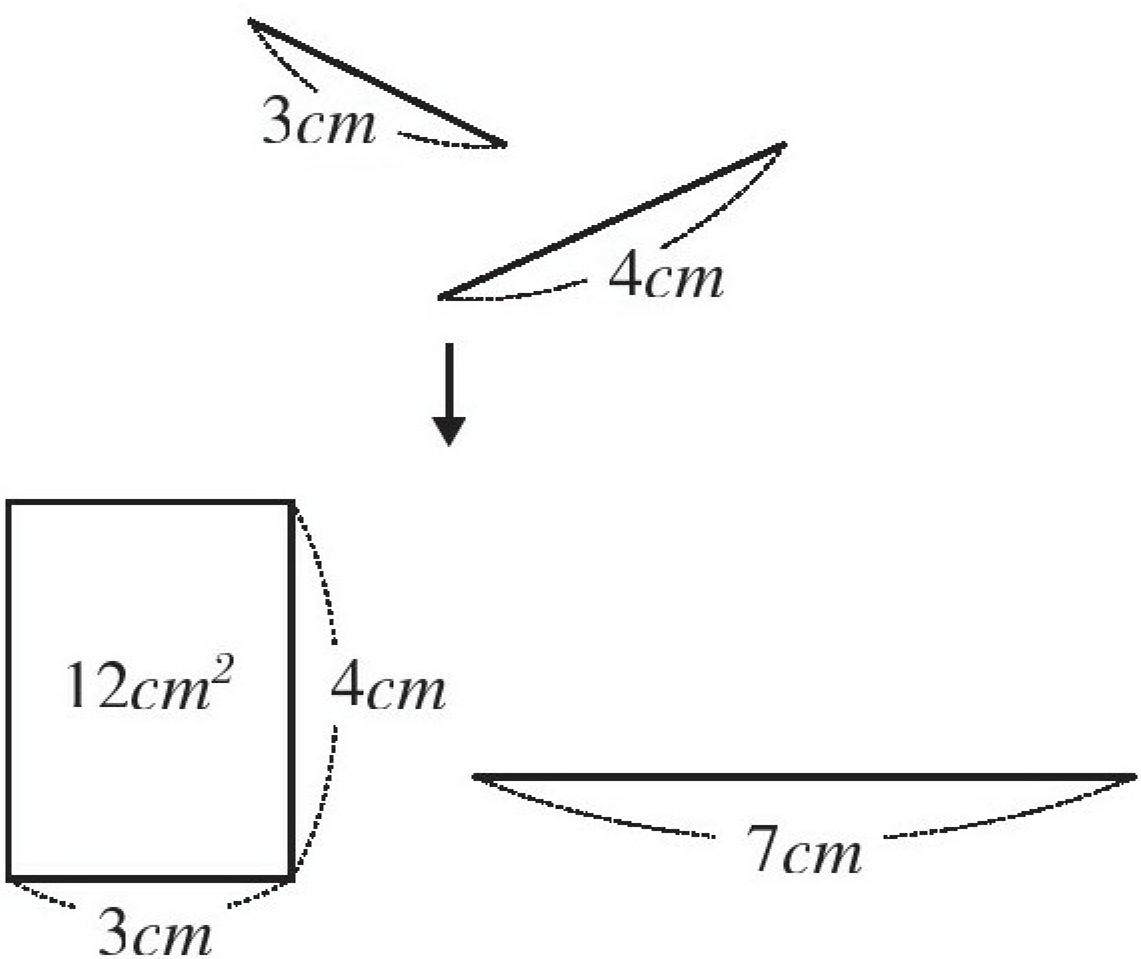
无论如何，在进行乘法运算的时候，使用的数字似乎都具有不同的特性，例如行和列、纵和横，或是速度和时间等。这是我们在理解数学当中的“次方”或“次元”时应有的正确印象。一般而言，乘法运算就是一种使用不同性质的东西所进行的计算，计算的结果将会让我们得到全新性质的东西，有可能是面积，也有可能是移动的距离。与此同时，加法原则上就是相同性质的计算，例如个数与个数、长度与长度等，因此最后也只会得到相同性质的答案。我们通常不太可能从加法的结果

看见另一个全新的世界。

次元增加，世界就会变宽广

举例而言，假设这里随意放置了两根木棒，长度分别是3cm和4cm。如果只是单纯地“整理”的话，当然可以选择把两根木棒排列成一条直线，但是这样只会得到一根7cm长的木棒而已，对吧？这是当然的。

但如果我们把其中一根横放，另一根纵放的话，这样的“整理”又会得到什么结果呢？如此一来，我们可以看到一个面积为12cm2的长方形，也就是通过两个“长度”，看到了全新的“面积”的世界。这就是乘法式整理的优点。



换一种方式解释吧。请想象眼前有一条直线，当直线上的点被决定为3或10时，它的位置基本上就固定了，对吧？相对地，当我们以x轴为横轴、以y轴为纵轴来考虑坐标轴时，坐标轴上的点就必须决定x和y两个值。换句话说，直线上的点只有一种自由度，坐标轴上的点则有两种自由度。这种自由度在数学当中又称次元，次元一旦增加，世界就会急剧扩张。

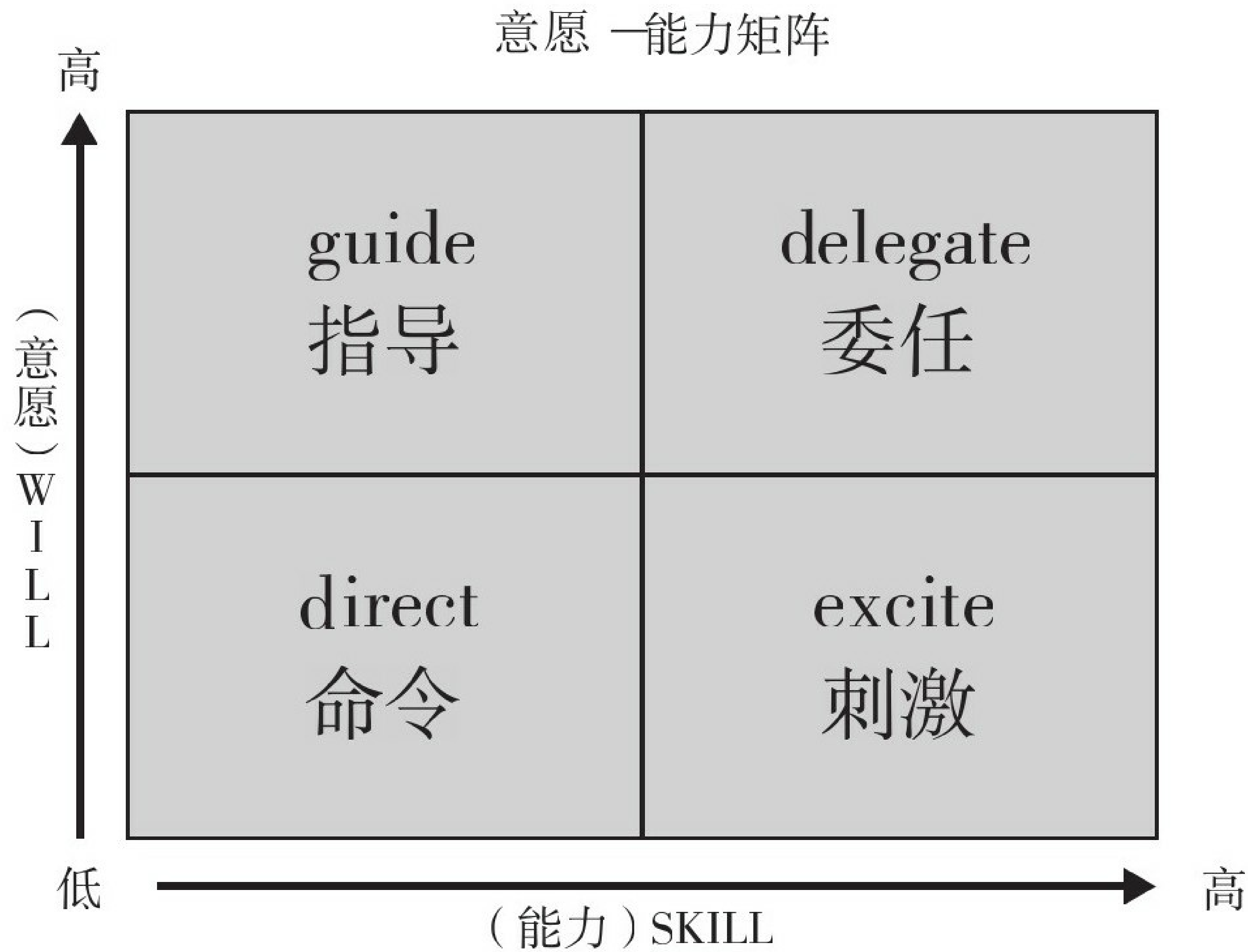
无法弹跳的蚂蚁生存在二次元的世界，可以跳得很高的青蛙则生存在三次元的世界。原本蚂蚁和青蛙站在彼此的面前，下一瞬间青蛙却跳到了蚂蚁的背后，此时蚂蚁恐怕会吓一大跳：“青蛙竟然瞬间移动了！”次元的增加，意味着一个远超过想象的新世界即将在眼前展开。

如果你得到的信息不够充分的话，不妨思考一下能否通过乘法式整理，让这些稀少的信息化为增加次元（自由度）的工具，相信你一定能够看见一个全新的世界！

意愿—能力（Will-Skill）矩阵

最容易与“通过乘法带来大量新信息”联想在一起的，就是表格式思考术等工具中常见的“矩阵”。此处要为各位介绍的是著名的意愿—能力矩阵。

意愿—能力矩阵是一种为了让我们与同事或下属间的沟通更有效，而将人依照意愿（will）和能力（skill）两种不同指标加以分类的方式。两种指标相乘总共可区分出4种类型，分类完成后，即可知道我们应该用什么样的态度来面对该同事或下属。



（能力高）×（意愿高）=委任（deligate）

（能力高）×（意愿低）=刺激（excite）

（能力低）×（意愿高）=指导（guide）

（能力低）×（意愿低）=命令（direct）

能力高且意愿也高的人，即使把工作完全交给他也没问题，因此我们可以采取的方式是“委任”；能力高但意愿低的人，为了提高他的工作动力，我们可以采取时而

褒奖、时而训斥的方式给予“刺激”；能力低但意愿高的人，未来的发展潜力也高，所以我们可以通过“指导”的方式加以培养；能力低且意愿也低的人，我们恐怕只能采取“命令”的方式来对待他了。

为什么呢？把意愿和能力这两种性质相异的指标，依据指标的程度综合考虑，就可以很明确地得出相应的策略。

文思枯竭的时候，大胆地用乘法式思考将相异的概念凑在一起，就是一种典型的数学式思考。

准备一份高效率的检查表

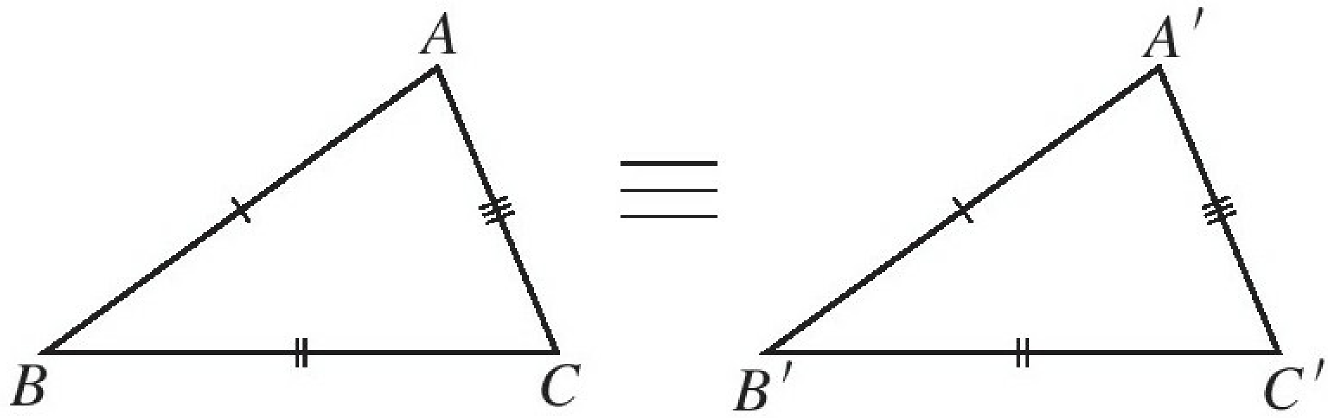
到目前为止，我们已经介绍了能推理出隐藏信息（性质）的分类和乘法式整理。严格来说，这些都是在必要信息不足的情况下，可以采取的处理方式。但是在实际的工作或生活当中，我们或许更常碰到被大量信息包围的情况，此时该采取的方针是只考虑最低限度的必要信息，然后决定下一步行动。

世界上有很多这方面的专家。很多整理早已在这些专家或前人手中完成，所以作为后人的我们，理所当然只需扮演乘凉的角色。

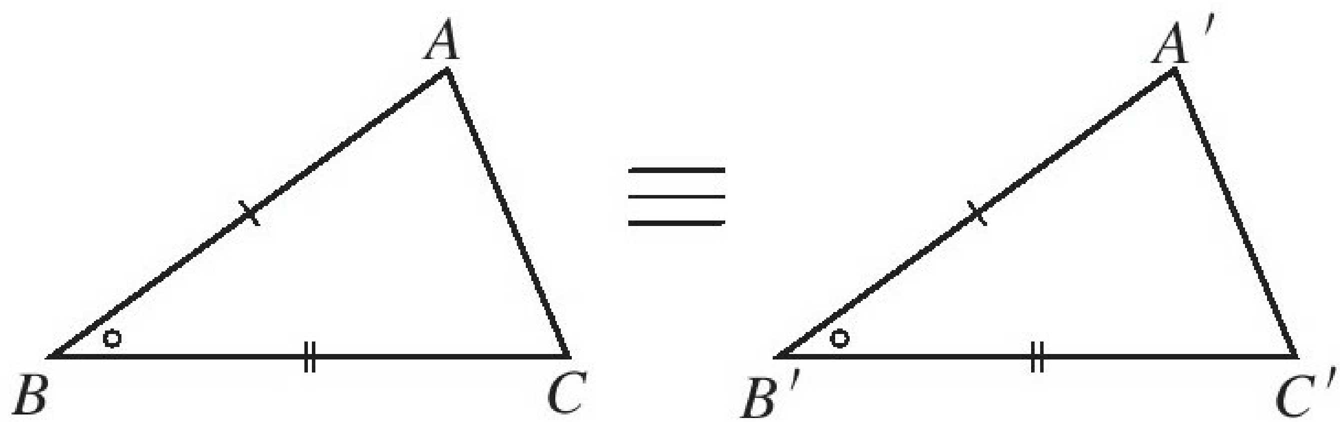
初中数学的三角形全等条件，就是这种高效率检查表的经典范例之一。

大家都知道，三角形是由三个角和三条边组成，所以一个三角形总共有六组信息。如果“两个三角形全等”，代表这六组信息完全相同，但如果仔细筛选的话，其实六组当中只要有三组相同，即可证明两个三角形全等，这就是所谓的三角形全等条件。三角形全等条件如下：

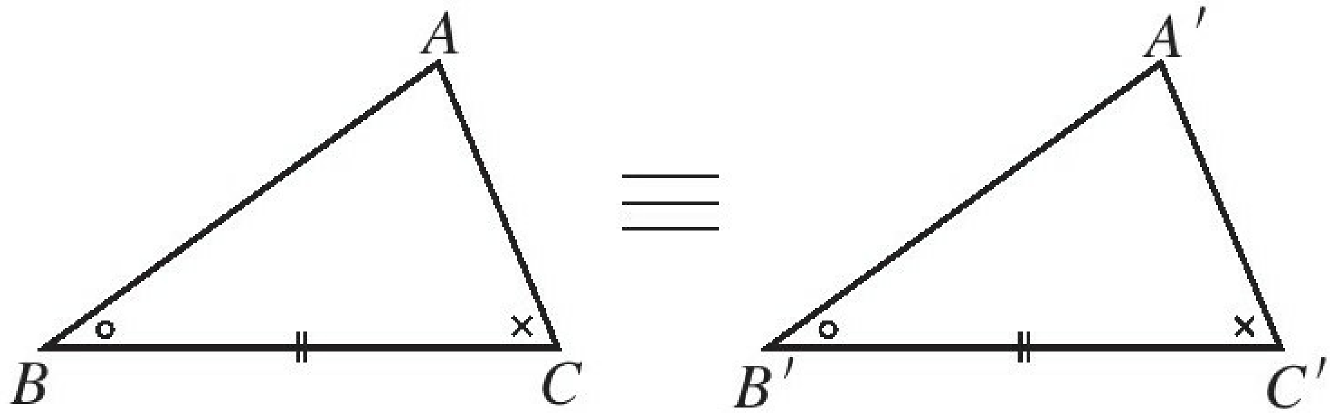
（ｉ）三条边对应相等（三边相等）



（ii）两条边及其夹角对应相等（两边夹角相等）



（iii）两个角及其夹边对应相等（两角夹边相等）



从三角形的六组信息中挑选三组的方法还有：

（iv）三个角对应相等

（v）两条边及其夹角之外的角度对应相等

（vi）两个角及其夹边之外的边对应相等

但选择iv～vi的话，光凭这些信息并不能判断两个三角形是否全等。i～iii的条件足以构成高效率的检查表，但iv～vi的条件却是低效率的检查表。

ECRS检查表（改善四原则）

在此介绍高效率检查表的另一个例子，就是ECRS检查表。这种检查表又称改善四原则，如果你从事生产管理等行业的话，想必对此并不陌生。ECRS分别代表eliminate（取消）、combine（合并）、rearrange（重组）和simplify（简化）。一般来说，在思考如何改善作业程序时，只要确认这四点，就可高效率地取得良好的成果。

【ECRS检查表】

取消（eliminate）：能否省略工程、作业、动作？

合并（combine）：能否同时进行多组工程？

重组（rearrange）：能否调换顺序？

简化（simplify）：能否简化作业？

从三角形的全等条件可知，当我们被大量信息包围、无法逐一确认的时候，拥有一份高效率检查表是一件非常有效的事。

想必也有很多人曾在搬家的时候，使用过搬家公司提供的确认清单吧？或是在驾校手忙脚乱地确认细节时，经过教练说明确认事项和方法后才恢复冷静吧？此外，在最近特别受到瞩目的统计学中，比起巨量资料，人们更倾向于通过确认全体资料的平均值、中间值、标准偏差、相关系数、p值等来掌握整体概况。

第②方面 顺序概念

- 选择时由大到小
- 证明时由小到大

请容我提一件私事。我现在有一个快满五岁的大女儿和一个刚满两周的小女儿。小女儿刚刚能够慢慢跟人对话，当她们姐妹俩一起玩的时候，我最常叮嘱的就是排队这件事。姐姐先使用的东西，要等姐姐使用一段时间以后才可以换人；在公园滑滑梯或荡秋千时，如果有其他小朋友在排队的话，就要乖乖排队。总之，我觉得自己

每天都在重复提醒同样的事。因为我担心，如果女儿们不懂得排队的话，将来没办法和其他朋友一起玩，甚至可能被朋友们排挤。即使是快上小学的小朋友，也都懂得先排队的人先玩玩具或是先滑滑梯的规矩，可见在孩童们的心中，也能够接受这种遵循顺序的观念。

我在前文提到“学习数学是为了培养逻辑思维”。所谓的逻辑思维，就是能够理解他人所表达的意见，并能用自己的想法说服他人。换言之，要成为一个有逻辑思维的人，必须能够理解和说服他人，其中“遵循顺序”是基本中的基本。

选择时由大到小

那么，一个有逻辑思维的人究竟必须遵循什么样的顺序呢？其实这取决于你今天的目的是要选择一样东西，还是要证实某件事的正确性。我们先来谈谈选择东西时的正确顺序。请思考下面的例子：

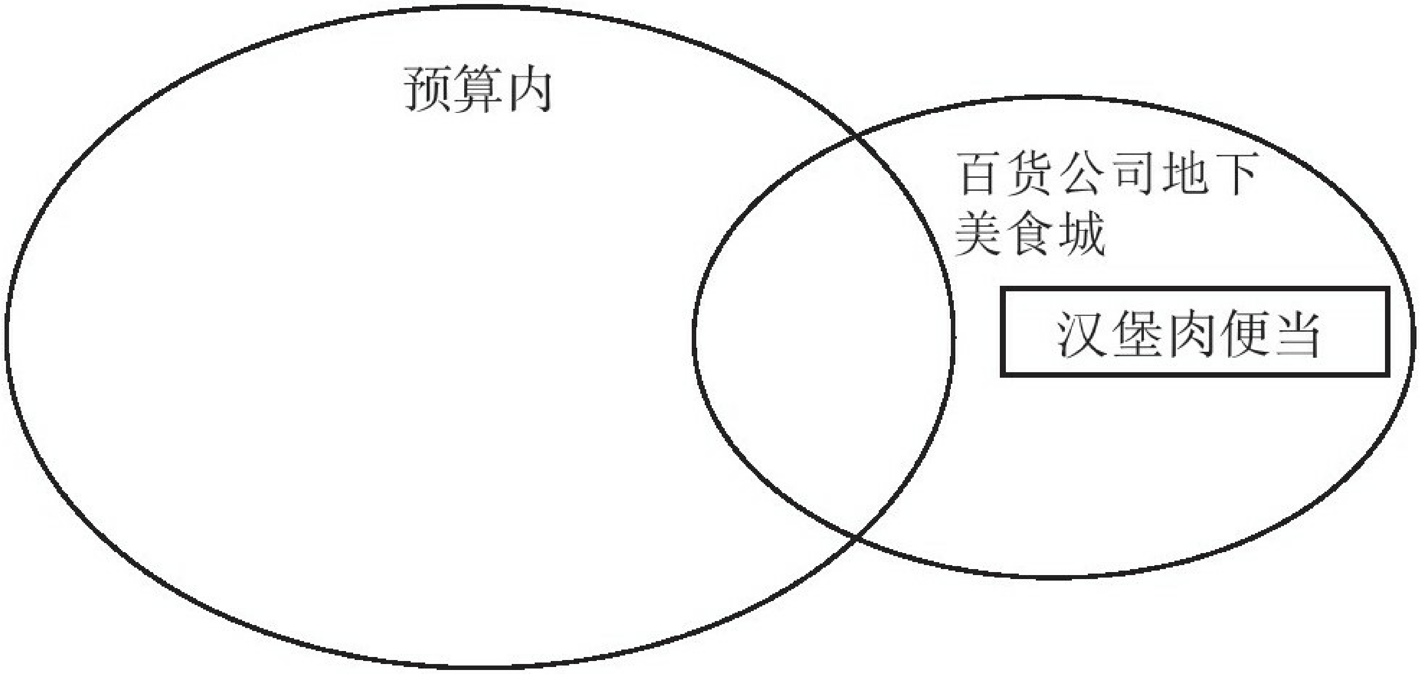
员工A和员工B打算在午休时去买今天的午餐。午休时间一小时，预算是1000日元以内。两人今天都想吃肉。

A心想：“百货公司的地下美食城应该有卖很多好吃的东西。”于是他选择去车站旁的百货公司买午餐。然而，百货公司的地下美食城大多都是高级餐厅，即使找到看起来很美味的汉堡肉便当，但是超出了原本的预算。A来回找了30多分钟以后，还是没找到符合预算的东西。结果他只好一边抱怨着“今天运气真差”，一边打消吃肉的念头，跑到车站旁的荞麦面包店解决他的午餐。

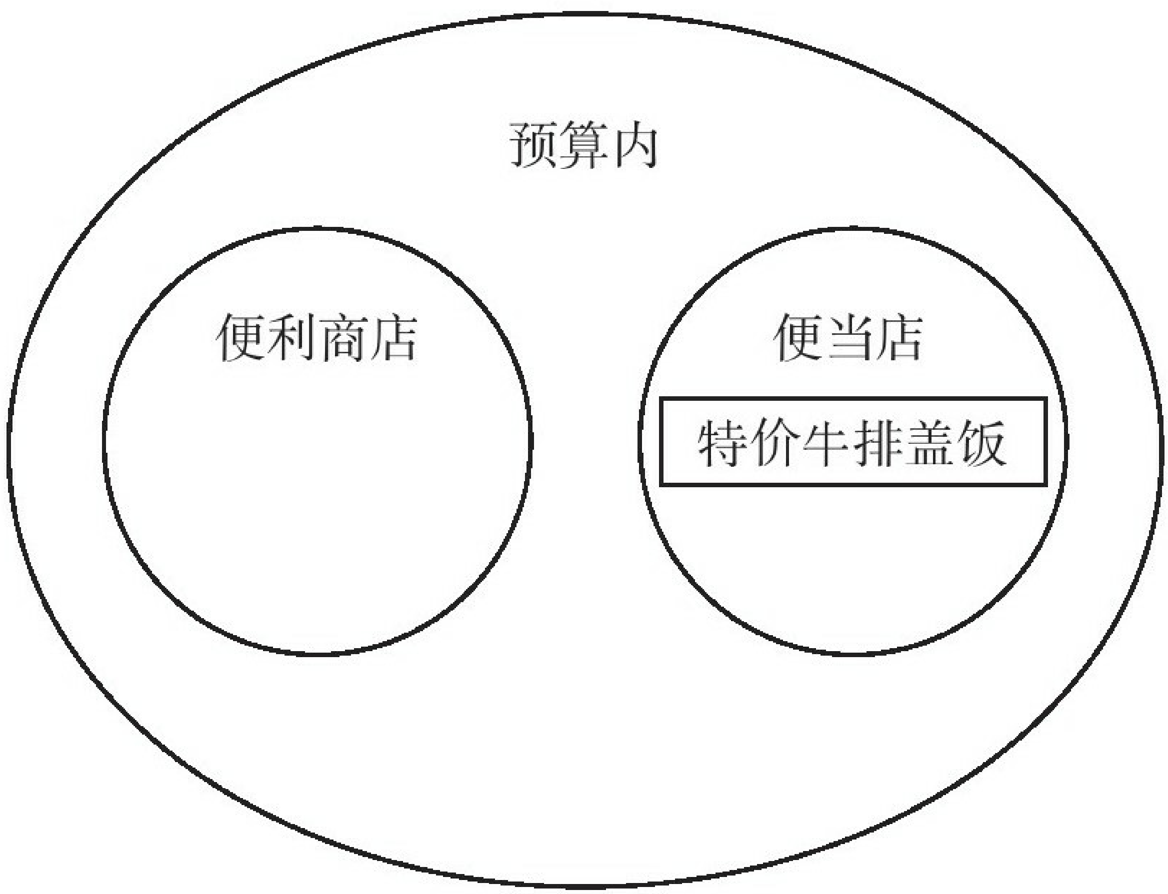
而B从一开始就决定到公司附近的便当店买午餐，理由是只有便利商店或便当店的东西符合他的预算。结果B在便当店找到了一款680日元的“特价牛排盖饭”，顺利地达成了最初的目的。他高兴地在内心直呼：“太幸运了！”当然，时间上也还相当

富裕，因此他便心满意足地回到办公室，享用他的午餐。

怎么样？B能够满足地享用午餐，真的是因为他运气比较好吗？不是的。B能够达成目的纯粹是因为他的思维方式比较有逻辑性。那A的问题又出在哪里呢？我们把两人选择午餐的方式，用图画的形式来比较一下。



A 选择午餐的方式



B 选择午餐的方式

B从一开始就选择了价位符合预算的店，因此无论他选择店内的哪个便当，都不必担心会超出预算，也不会败兴而归，他可以很有效率地挑选一份他今天想吃的便当。

而A呢，他选择配合今天“想吃好吃的肉”的心情，跑到了百货公司。但是百货公司地下美食城卖的东西很多都超出了预算，所以他在挑选时，必须一个一个地注意价钱，很多商品虽然一眼看去很吸引人，但价格却超出了预算。要从其中找出符合他口味和预算的商品实在很费劲，也相当耗时，而且这种方法还不能保证让他在预算内买到便当。虽然A的这种搜寻方式有可能让他“淘到宝”，却称不上是合理的方式。

必要条件和充分条件

在进一步讨论之前，我们先来复习一下何谓必要条件和充分条件。我想各位对这两个名词肯定不陌生，但真正能够掌握其确切定义的人却很少。如果用字典的形式加以定义，就是：

“当命题‘若p则q’为真，则p为充分条件，q为必要条件。”

我想几乎没有人能理解这句话的意思吧？若我们再分析得详细一点儿：

必要条件：对某事件的成立来说（至少）必要的条件

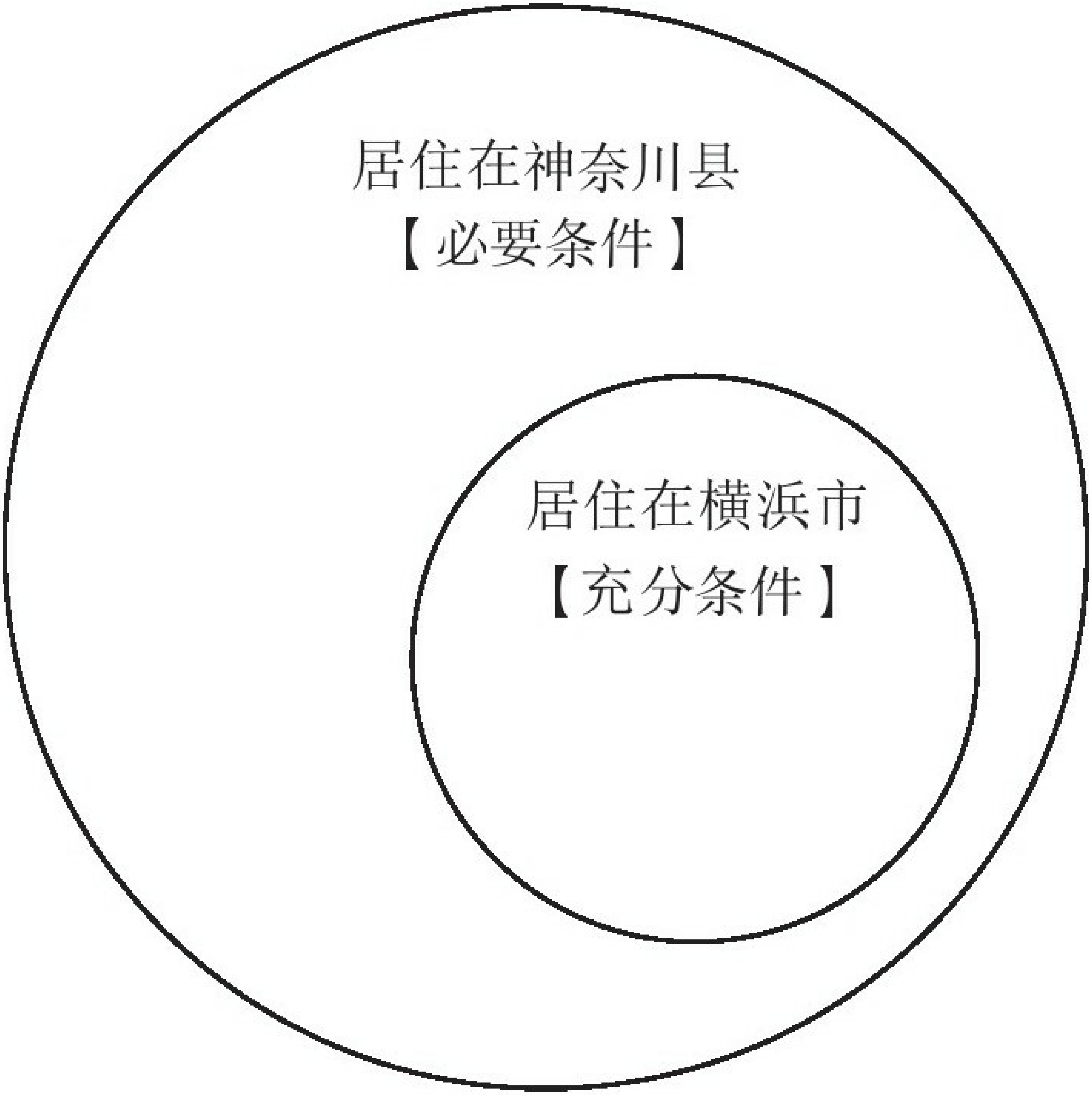
充分条件：对某事件的成立来说（足够）充分的条件

用这样的方式解释好像还是不够清楚吧？我在说明必要条件和充分条件时，经常使用下面的例子：

居住在神奈川县是居住在横滨市的必要条件；居住在横滨市是居住在神奈川县的充

分条件。

一个人如果居住在神奈川县，就有可能居住在横滨市（编者注：横滨市位于神奈川县内）；而一个人如果居住在横滨市，就一定居住在神奈川县。根据这样的定义，如果我们把充分条件和必要条件联想成：必要条件=宽松的条件；充分条件=严格的条件，或许会比较容易理解。



如果把刚才的例子画成图的话，就会如上图所示。

根据上图，我们可以把必要条件和充分条件分别视为：

必要条件=大范围；充分条件=小范围

将上述内容加以整理后，就会是：

必要条件=宽松的条件=大范围

充分条件=严格的条件=小范围

合理选择的原则

当我们尝试做出逻辑性的选择时，最重要的就是遵循这样的顺序：利用必要条件进行筛选→确认是否符合充分条件。

看起来好像有点儿复杂，但其实大部分人在做选择时，都是遵循这套顺序采取行动的。我就拿穿衣服来说好了，早上打开衣柜挑选衣服时，你一定会先从适合当季气候的衣服开始挑选吧？冬天选择可以御寒的棉衣，夏天选择轻薄透气的单衣，因为在选择今天的衣服这件事情上，“必要条件（宽松的条件=大范围）”就是“适合当季气候”。不过，光靠这个条件，还不足以让你决定当天要穿什么。接下来你应该会从适合当季气候的衣服中，根据时间、地点、场合等挑选出合适的衣服吧？例如要去上班的话就穿西装，要去健身的话就穿运动服。讲究一点儿的，说不定还会把“能够搭配今天的包包”纳入“必要”条件之中。总而言之，经过这样一番筛选之后，最后就只剩下少许选项了。此时你要做的就是逐一检查剩下的选项是否符合你今天的心情，而“符合今天的心情”，就是“充分条件（严格的条件=小范围）”。我想应该很多人都有过类似的经历吧？明明按照必要条件筛选出几个选项，结果每一件都不喜欢，只好告诉自己：“该买新衣服了。”当然这也因人而异。不过，“符合今天的心情”恐怕是最严格的条件了，这个条件都能满足的话，那么自己的衣服就已经足够了。

各位就是像这样在不知不觉中，完成了“利用必要条件进行筛选→确认是否符合充

分条件”的顺序。不过，如果你像前例中买不到午餐的A一样，被欲望牵着鼻子走的话，最后也有可能会鬼迷心窍地破坏这个原则。一旦原则被破坏，风险性就会增加，导致无法做出合理的选择，所以还请特别注意。

关于“证明”

前面我们讨论的是符合逻辑性选择的正确顺序。然而，当我们试图证实（亦即证明）某件事的正确性时，顺序就前后相反了。在开始之前，我们先来复习一下证明的基本概念。

所谓的证明，就是假设（则）$\Rightarrow$结论。

从“如果〇〇的话”开始，到“□□”的结论为止，将这段过程用符合逻辑且浅显易懂（我认为这一点也很重要）的方式表现出来，就是“证明”。

另外，证明的对象仅限于人们能够客观判断对错的事物。我们可以把这些事物称作“命题”。举例来说：

“咖喱很好吃。”

这句话看起来似乎没有不对的地方，但好不好吃是很主观的看法，无法客观判断，因此这句话不能算是命题。我们再看另一个例子：

“日本的人口超过2亿。”

虽然这句话明显有误，但由于人口可以根据资料进行客观的判断，因此这句话属于命题。而所谓的证明，就是用逻辑性的方式证实“如果〇〇的话，则□□”的命题为

真。

正确的证明是由小到大

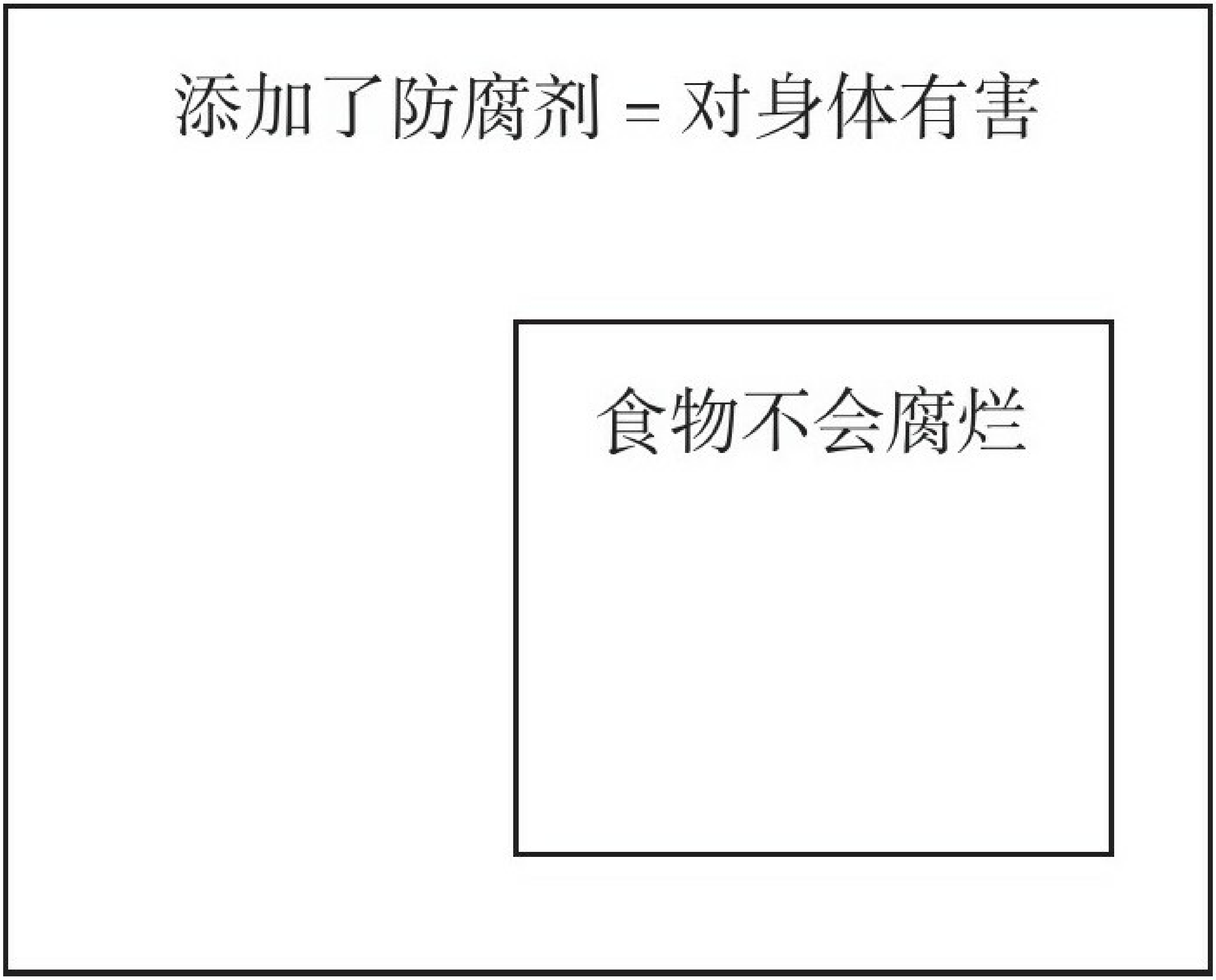
在我写这本书的2013年春天，有一部短片在网上特别火，标题是“放六个月也不会长霉，永远的快乐儿童餐幻灯秀”。制作短片的人，将汉堡快餐的快乐儿童餐拆掉包装，放在室温下六个月，然后把每天拍下来的照片制作成幻灯片。由于幻灯秀中的汉堡，在放了180天以后仍然没有长霉，因此网友们便纷纷鼓噪：“哇，这里面究竟添加了多少对身体不好的东西（防腐剂）啊！”

确实，不会腐坏（不会长霉）$\Rightarrow$添加很多防腐剂=对身体不好。

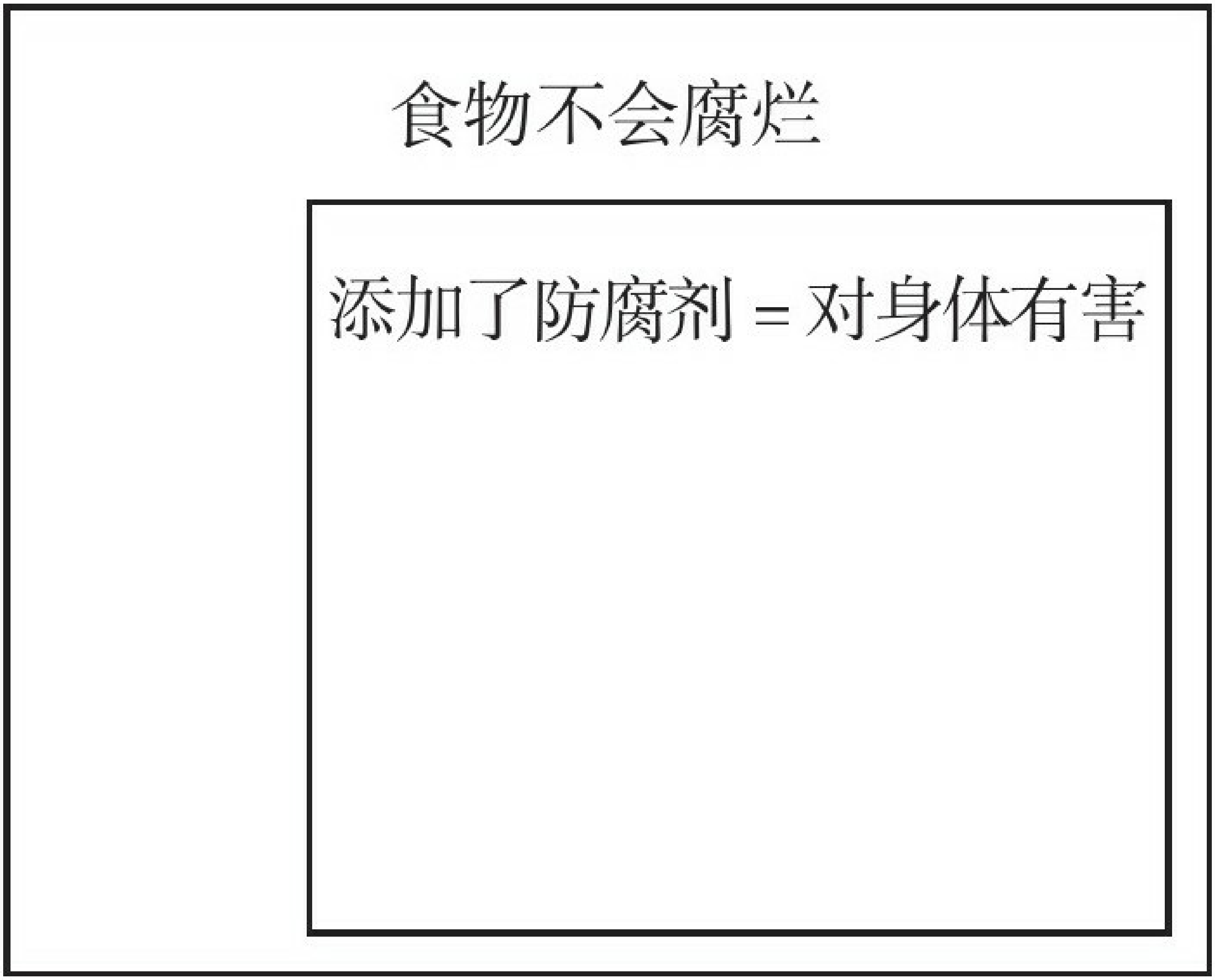
我能理解人们为何会产生这样的联想，但事实真的是这样吗？

眼见这场风波愈演愈烈，一名心中怀抱疑问的网友决定亲自展开实验。结果根据他的实验，无论是快餐中的汉堡，还是用牛肩肉的绞肉做成的手工汉堡，都不会随时间而腐烂！理由据说是因为扁平的手工汉堡肉跟快餐中薄薄的汉堡肉一样，由于表面积较大，湿气容易散发，因此不容易长霉，也不容易滋生细菌（制作过程中经过高温灭菌也是原因之一）。通过这个实验，人们终于知道，不会腐烂的食物中并不一定添加了防腐剂。

如果把上述情况画成图，在网友的实验结果出来前，许多人都以为：

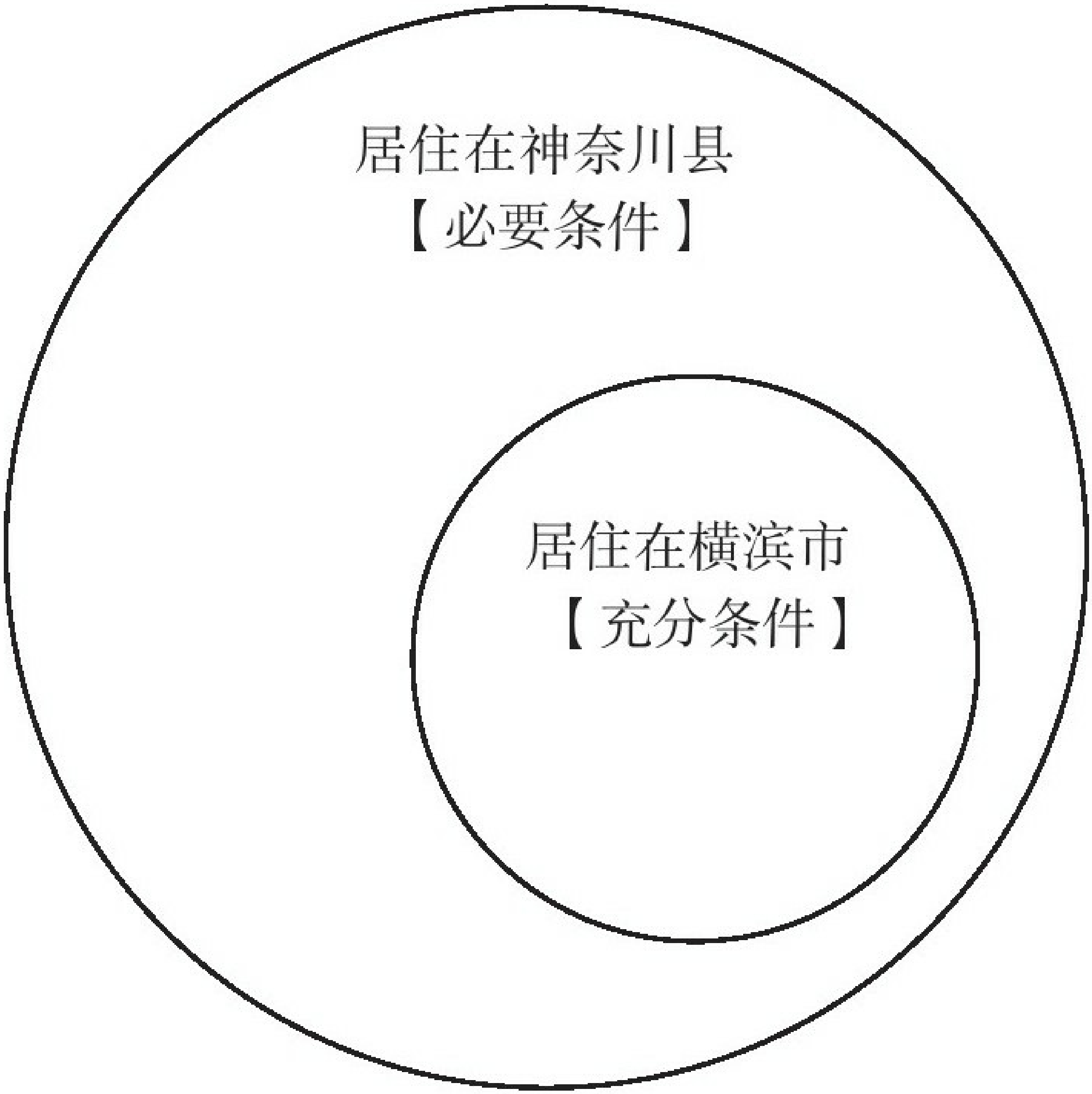


换句话说，很多人都认为不会腐烂的食物当中一定添加了防腐剂，所以肯定对身体有害。而根据网友的实验，在不会腐烂的食物当中，也有没添加防腐剂的，因此实际上的关系应该是：



换言之，我们不能因为食物不会腐烂，就断定其中添加了防腐剂，从而对身体有害（事实上，“添加了防腐剂=对身体有害”结论中的“=”，也应该经过确切验证才行）。

接下来，我们回过头来看看刚才提到的必要条件和充分条件：



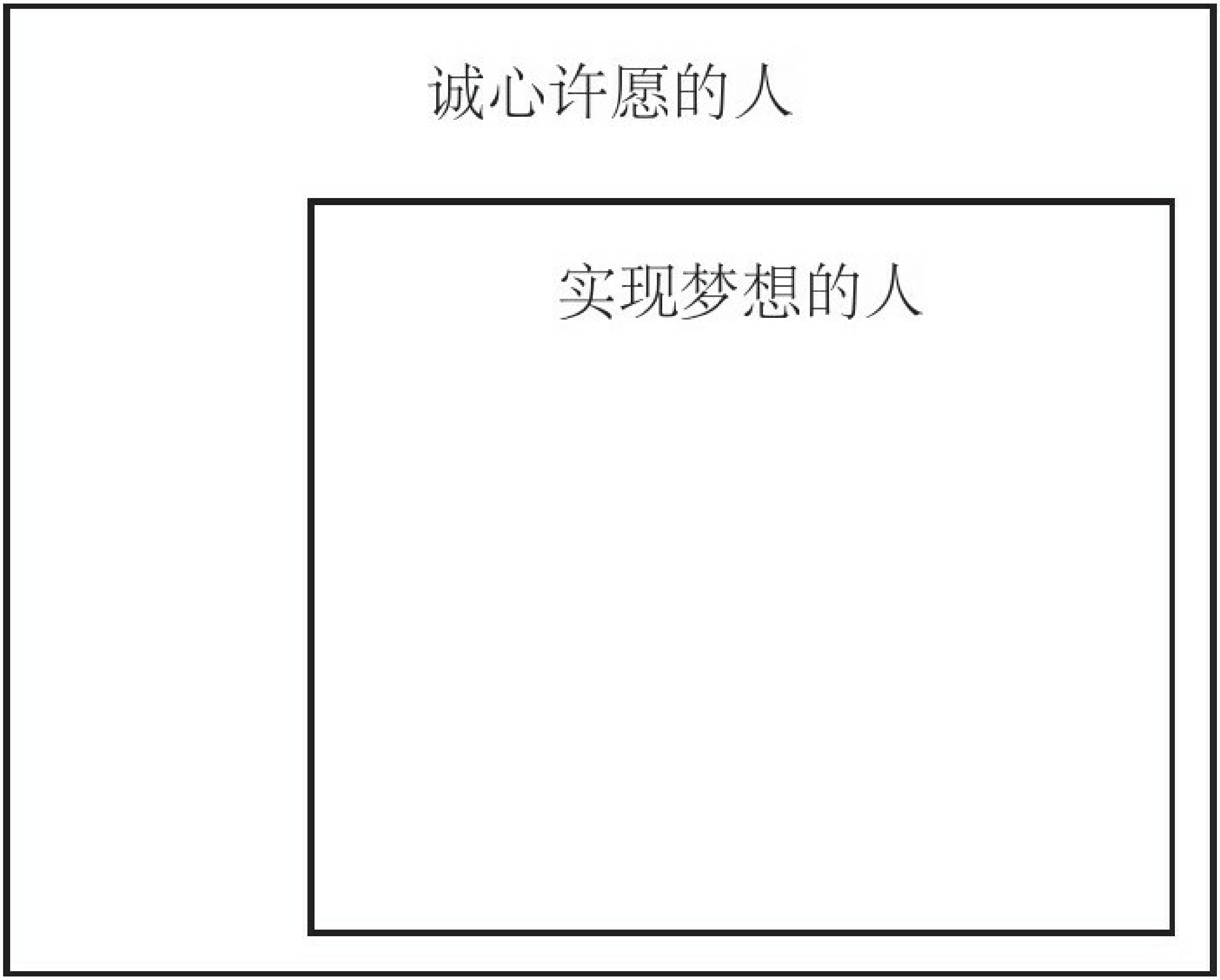
必要条件是大范围，充分条件是小范围。如果某人住在横滨市的话，代表他当然也住在神奈川县，所以由此可知：

“居住在横滨市（充分条件：小范围）（则）居住在神奈川县（必要条件：大范围）”是正确的（真命题）。不过，当情况反过来的时候，即使某人住在神奈川县，也不表示他就住在横滨市，因此，“居住在神奈川县（必要条件：大范围）

（则）居住在横滨市（充分条件：小范围）”的命题不正确（假命题）。在逻辑当中，“小大”总是为真，“大小”总是为假。

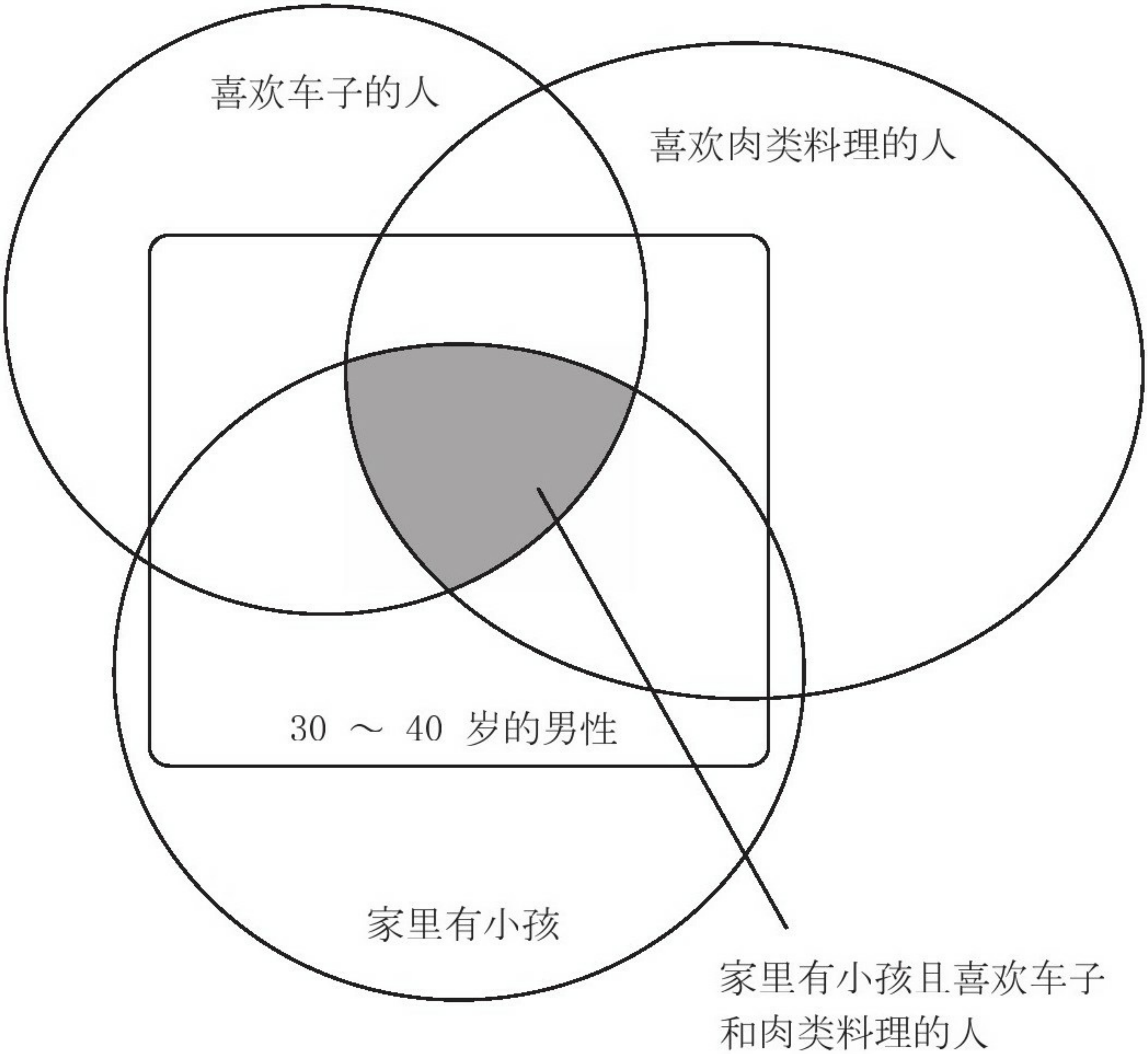
若有任一事例不符合实情，我们就说该命题为“假”。例如，假设某班级学生当中，只有一人身高超过180cm，那么，“这个班级的学生身高都在180cm以下”就是假命题。命题当中只要出现任何反例（不符合实情的事例），就代表该命题为假命题。

我们再来看看另一个例子吧。有人说：“只要诚心地许愿，梦想就一定会实现。”这句话在逻辑上是正确的吗？虽然心里很想大喊：“没错！”但很可惜，这句话在数学上似乎说不通。因为实现梦想的人，或许曾经诚心地许过愿，但也有人诚心许了愿，却还是没能实现梦想。以图像来表示的话，就会是这样：



诚心许愿的人比实现梦想的人还多，因此“诚心许愿⇒实现梦想”是“大⇒小”，也就是说这是一个“假命题”。

我们再把这种原则套用在企业策划上看看。假如某一年，你被选为员工旅行的负责人。员工大部分都是30～40岁的男性。根据公司的统计资料显示，30～40岁的男性的喜好通常如下图所示：



根据上图，为了让所有人都能满意这趟旅程，策划的内容很有可能会针对中间这群“家里有小孩且喜欢车子和肉类料理的人”设计。

比如说，安排一趟三天两夜的F1赛车观赛之旅，然后在行程中加入有名的人气牛排屋，以及可以帮小孩买到特殊造型玩偶的纪念品店。但由于偏好这种行程的人只占其中一部分，因此对大多数人恐怕会觉得“行程有点儿太满了”。与其这样，不如把F1观赛、牛排屋和纪念品店都列为开放选项，告诉大家：“需要的话可以带各位

走一趟。”虽然实际操作上有些麻烦，但应该能够满足大部分员工的需求。我想各位读者应该都很清楚了，由于“30～40岁的男性（则）家里有小孩且喜欢车子和肉类料理”的推论是“大⇒小”，因此这是一个假（错误）命题。不过，“30～40岁的男性⇒（则）家里有小孩，或喜欢运动，或喜欢肉类料理”的推论是“小⇒大”，因此这是一个真（正确）命题。

我们在运用必要条件和充分条件的时候，推导出正确证明（逻辑）的诀窍，就是以充分条件为假设，以必要条件为结论来进行思考。

“风一吹，木桶店就会赚钱”是真命题吗？

接下来，为了复习前述所有观念，我们来思考一下那句著名的谚语：“风一吹，木桶店就会赚钱。”这句话就是标准的“如果○○的话，则□□”的“假设⇒结论”句型，不过它能够算是一道真命题吗？这句话出自无迹散人的作品《世间学者气质》，作者在文中写道：

今日大风使沙尘吹入人眼，世上出现大量盲人，是以三味线（编者注：日本传统弦乐器，与中国的三弦相近，当时的日本盲人以弹三味线谋生）供不应求。由于需要大量猫皮（当时的三味线音箱是以猫皮制作），因此世界上猫的数量锐减。其后老鼠肆虐，把木桶咬得满目疮痍。木桶行业看似值得一搏，唯手边无本，只得打消此意。

换句话说，“风一吹，木桶店就会赚钱”的“逻辑”如下所示。

①大风吹起沙尘。

⇒

②沙尘吹进人的眼睛里，导致盲人增加。

⇒

③盲人购买三味线。

⇒

④制作三味线需要猫皮，因此猫被捕杀。

⇒

⑤猫的数量减少，使老鼠数量增加。

⇒

⑥老鼠咬坏木桶。

⇒

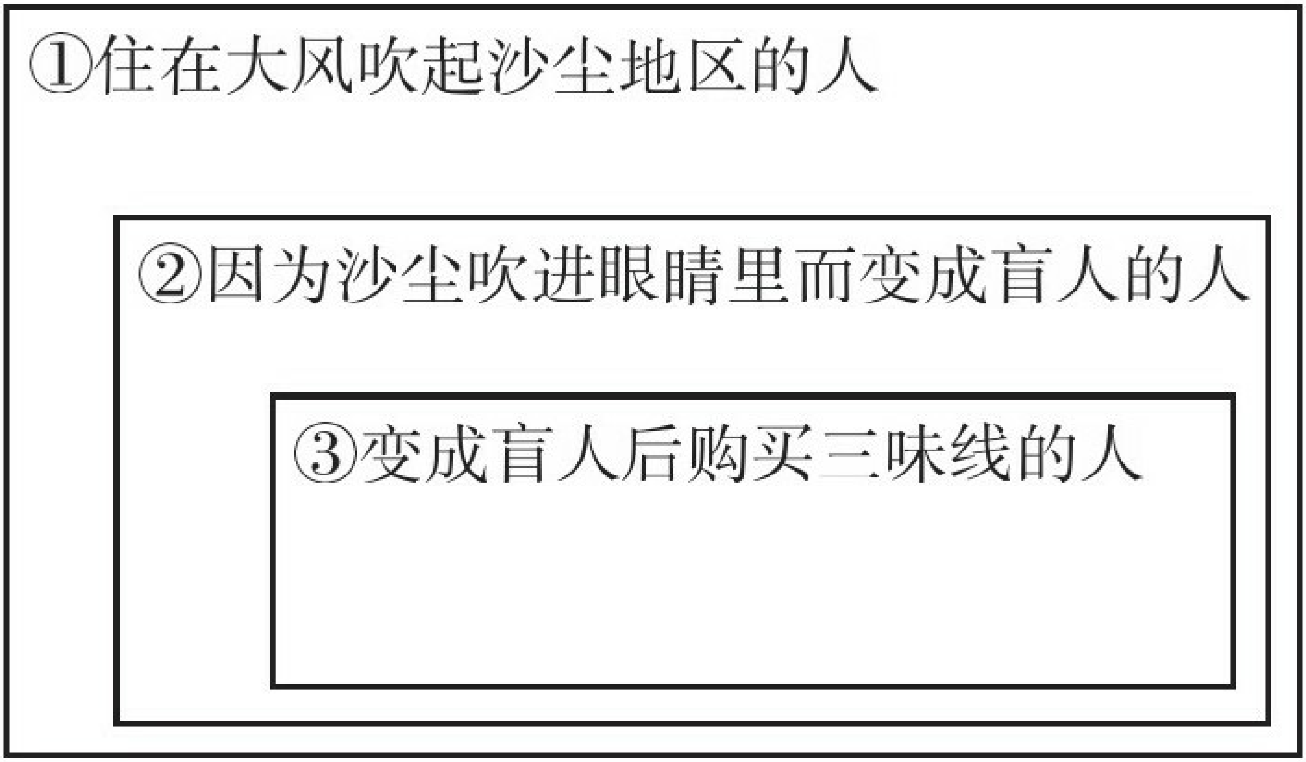
⑦木桶需求量增加，木桶店大赚一笔。

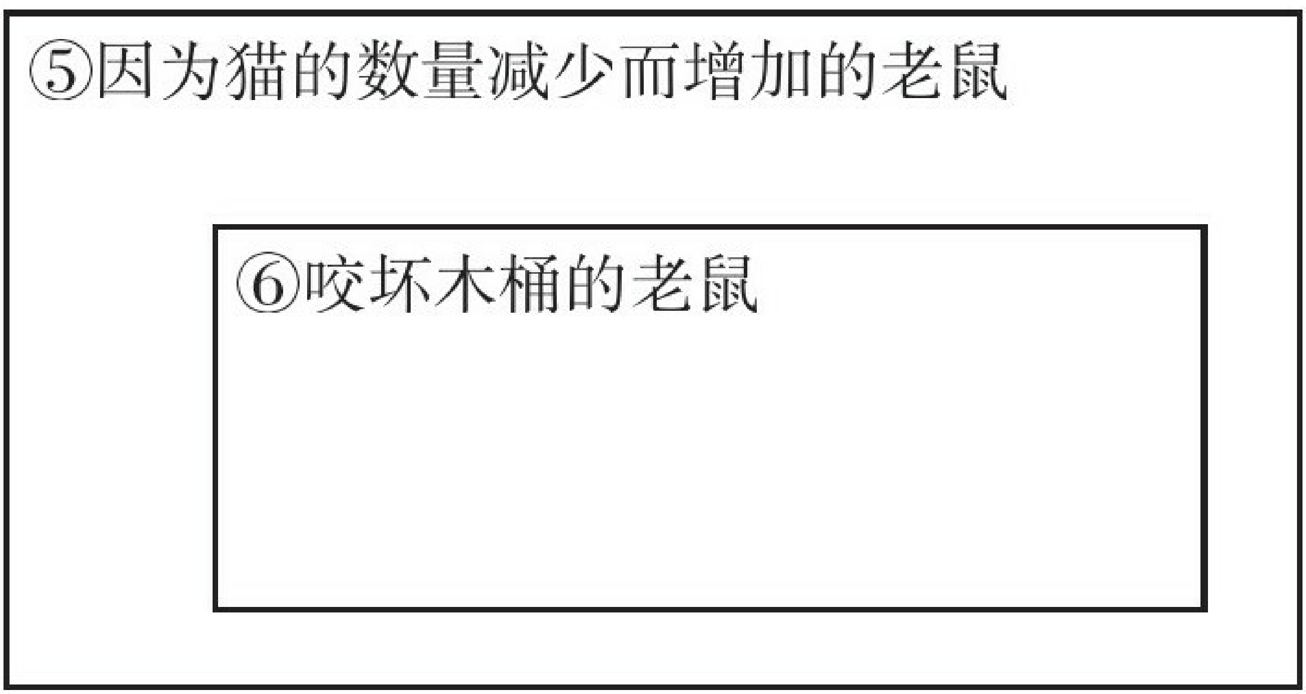
没错吧？从现代人的角度来看，②～③似乎有点儿牵强，但应该也有很多人照顺序看下来以后，点头默认确实说得过去，因为每一个“⇒”看起来都很合理。

不正如前文所说，正确的证明应该是“小 $\Rightarrow$ 大”，所以为了确认这一点，我们也把上面的过程，画成图像来检验一下吧。

好了，现在逻辑很明显了吧。在“风一吹，木桶店就会赚钱”的情况下，至少“① $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ③”和“⑤ $\Rightarrow$ ⑥”是“大 $\Rightarrow$ 小”，因此这道命题不正确。一来，沙尘吹入眼中，人不一定会变成盲人；再者，变成盲人的人，也不一定会买三味线；至于老鼠的部分，即使因为猫的数量减少而增加，也不见得会把木桶咬坏。

换言之，“风一吹，木桶店就会赚钱”不一定会成立，顶多只能说“有可能会成立”。反过来说，由于其中有不符合实情的事例（反例），因此这是一道假命题。





当然，我们相当清楚“风一吹，木桶店就会赚钱”只是一句俗谚，实在没必要为此大声嚷嚷：“这不符合逻辑！”一边窃笑一边体会“逻辑化”的乐趣，或许才是正

确的分析态度吧。话虽如此，这个世界上实在有越来越多类似这样的“诡异命题”，让我怎么样都无法不去在意。比如说：

“习惯吃早餐的孩子，成绩比较好。”

“只要接受早期教育，孩子就能考上名校。”

“炎热的夏天，啤酒销量比较好。”

“去山下公园约会的情侣都会分手。”

……

但由于这些全部都是“大 $\Rightarrow$ 小”，因此不能说是真命题。在这样的情况下，可能就必须通过相关系数等统计学的方式，来表现两件事情的关联程度了。

啊，这一节还没有出现算式呢，这样下去可能有人会说：“我根本不记得自己学过这些东西啊！”所以我们还是先来复习一下，高中的时候究竟是如何使用“小（充分条件）$\Rightarrow$ 大（必要条件）为真”的概念的吧。

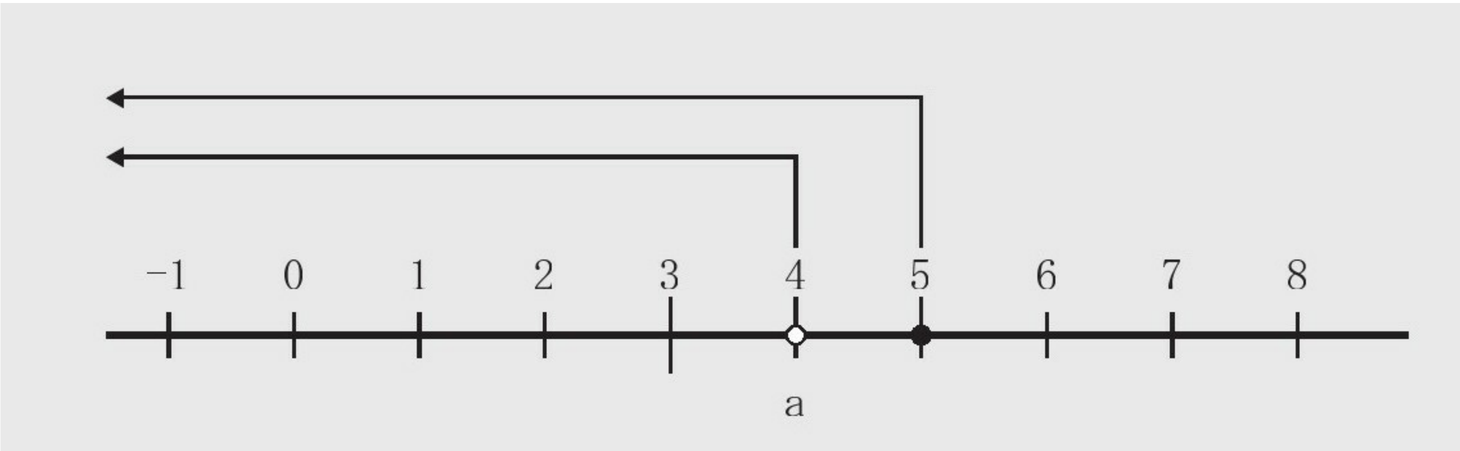
【问题】

假设“若x＜a，则x≤5”为真命题，求整数a的最大值。

【解答】

相信这道题对各位来说很简单吧。如果要让此命题为真的话，只要符合“小

⇒大”即可。当a是整数的时候，我们可以在下图中标示出范围：



a=4是“小⇒大”

a=5是“小⇒大”

a=6是“大⇒小”

由此可知，a在5以下的时候是“小⇒大”，故若此命题为真，此时a的最大整数就是5。

第③方面 转换

- 换句话说

- 运用因果关系

我在第一章当中的阅读题中说过："作者会不断重复他想传达的讯息。"由于专业的作者会把自己的主张A，巧妙地变换成A'，因此我们在解题时只要掌握"A=A'"的关系，问题就可以迎刃而解了。

小孩子看到想买的玩具时，都会任性地吵闹："买给我！买给我！快买给我嘛！"然后不断重复同样的话语，但这种行为却不会出现在我们成年人身上，因为每一个成年人都知道，光是重复同样的话，并不能让别人把话听进去，所以我们才会把想传达的讯息变换成各种不同的形式。

拿写情书为例，如果想告诉对方"我喜欢你"，光是重复几十次"我喜欢你"，根本无法让对方深刻地体会到我们的心情（当然也有例外），所以我们才会用其他各式各样的话语来代替"我喜欢你"。

芥川龙之介曾在婚前给他未来的妻子文子写情书。以下截取信中的一段内容：

文子：

感谢前日田端乡里转交之信件。见面并无要事交代，但仍渴望与你见面。很莫名吗？尽管莫名，我的心情依旧不变。你可别取笑我。

再来还有一件妙事。每次想起你的脸时，脑海中浮现的永远是同一种表情。要说是什么表情，其实也说不明白，总之……就是微笑的表情吧。我曾在高轮的玄关看过这个表情。……我时常想起那副表情。我就是如此煎熬地想念着你。但即使煎熬，我仍感到幸福。我习惯在一切都很幸福的时候，预想最不幸的状况，我用这种方式锻炼我的心脏，以免将来遭遇不幸。其中一个状况就是你再也不来找我。只是自己在揣想而已，没有任何理由……

时间晚了（凌晨一点），我决定就此打住。你应该已经睡了吧？仿佛可以看见你睡着的模样。倘若我在你身旁，肯定会轻抚你的眼皮，愿你有好梦一场。

此致

敬上！

10月8日夜

芥川龙之介

这封情书最厉害的一点就是通篇没有出现一句“我喜欢你”或“我爱你”，却能让人深刻感受到龙之介先生对文子小姐的思念是多么迫切。

“渴望与你见面。”

“即使煎熬，我仍感到幸福。”

“其中一个（最不幸的）状况就是你再也不来找我。”

“轻抚你的眼皮，愿你有好梦一场。”

这些全部都是“我喜欢你”的另一种表达方式，或是说因为喜欢才会出现的结果。

如此美好的情书，如果再继续分析下去，恐怕只会显得我很庸俗，所以我们就在此打住吧。不过在接下来的这一节当中，我想针对数学思考术之一的“转换”，分成两个方向深入探讨，一是“换句话说”，二是“运用因果关系”。

首先，我们先从“换句话说”开始。

换句话说

记得有一次，长岛茂雄在解说棒球比赛的时候，被采访问到他对于赛事的看法。据说当时他的回答是：

“嗯，这个吗……这场比赛应该是得分超过对方一分以上的队伍会赢吧。”

听完这句话，肯定有很多人会想：

“这不是废话吗！长岛先生的神经怎么还是这么大条啊！”

我们会认为长岛先生的解说理所当然得让人失笑，因为这就是一个标准的“换句话说”。

还记得上一节我们复习了必要条件和充分条件吧？宽松的条件（大范围的条件）就是必要条件，严格的条件（小范围的条件）就是充分条件。同时，我们也确认了一件事，就是居住在横滨市（充分条件）居住在神奈川县（必要条件）。

像这种“充分条件必要条件”的命题，绝对都是真命题。我们把这种原则应用在长岛先生的解说上看看。假设现在有A和B两个队伍在比赛。为了确认在“A队胜利”和“A队的分数超过B队一分以上”中，何者为必要条件，何者又为充分条件，我们可以先列出两种命题。

A队胜利 $\Rightarrow$ A队的分数超过B队一分以上

A队的分数超过B队一分以上 $\Rightarrow$ A队胜利

咦？奇怪了，看来看去好像两个命题都符合逻辑。这么说来，“A队胜利”和“A队的分数超过B队一分以上”都是必要条件，也同时都是充分条件喽？没错！像这样即使把$\Rightarrow$（则）前后的内容互换，命题依然成立的时候，我们就说这两种条件互为充要条件。而当前后两件事互为充要条件时，我们就把这两件事称为等价。换句话说，“A队胜利”和“A队的分数超过B队一分以上”互为充要条件且等价。

当我们要把一件事情换句话说时，只要换成与那件事情互为充要关系的另一件事（等价条件），就绝对不会有逻辑上的错误。上述长岛先生的解说就是把棒球比赛的胜利，替换为等价的“分数超过一分以上”，因此在逻辑上可以说是准确无误。

这个例子或许有点儿极端，但比方说：

长方形$\Rightarrow$所有角度都相等的四边形

所有角度都相等的四边形$\Rightarrow$长方形

由于两者皆为正确的命题，因此“长方形”和“所有角度都相等的四边形”是等价条件，所以当我们把“长方形”替换成“所有角度都相等的四边形”时，在逻辑上并不会影响它的正确性。

顺带一提，充要条件和等价的概念，在数学课本上的定义如下：

“（若）p$\Rightarrow$（则）q”和“（若）q$\Rightarrow$（则）p”

当两者同时为真时，p是q的充要条件，q也是p的充要条件。

另外，当p和q互为充要条件时，我们说“p和q等价”，用“p $\Leftrightarrow$ q”表示。

哎呀，这种生硬的内容确实很难理解，但几乎所有数学课本的形式都大同小异。尽管内容不甚讨喜，但当我们把一件事情用另一件事情替换的时候，一定要注意两件事情是否等价。

日本有句俗谚：“蛋切得不好，圆的也能切成方的；话说得不好，再无心也显得伤人。”即使是同样的意思，我们也要找出一种不让对方受伤的说法。虽然有时可能会给人一种话中有话的感觉，但可以肯定的是，“换句话说”一直是根植于日本文化中的精髓，只是世界上有不少的“换句话说”意思根本不同，因此遇到类似状况时，还请多加留意，不要上当受骗了。

一般来说，数学式的变换必须符合等价变换的原则。例如：

$2x+1=5$

面对此方程，我们可以用以下的方式求得正解：

$$
\begin{aligned}
& 2x + 1 = 5 \\
\Leftrightarrow\ & 2x = 5 - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2x = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = 2
\end{aligned}
$$

原因是每一列都符合等价变换的原则。

然而，

$$\sqrt{x} = x - 2$$

没错吧？首先，我们用第40页提到的分数基础（ii）来分解算式，然后再套用基础（iii）的概念。

$$
\begin{aligned}
& x=(x-2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x=x^2-4x+4 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-5x+4=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(x-4)=0 \\
\Leftrightarrow\ & x=1 \text{或} x=4
\end{aligned}
$$

求得答案以后，当x=4时，

$$\sqrt{4}=4-2$$

2=2

我们可以确定这个答案是正确答案，但当x=1时，

$$\sqrt{1}=1-2$$

1≠-1

结果却变得如此诡异。为什么会这样呢？

这是因为，“两边取平方”的转换方式并非等价变换。

如果没有注意到这件事，最后就会像上述一样得到错误的答案。

要正确解答这道题，必须注意$\sqrt{x}$是正数，又因为$\sqrt{x}$=x-2，所以在取平方的时候，还必须注意一个条件，就是：

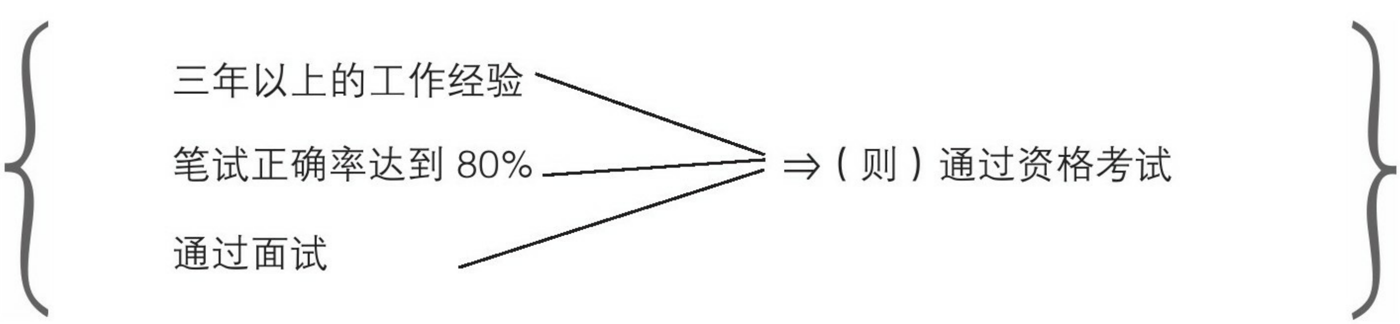
x-2≥0

这样才能求得正解。

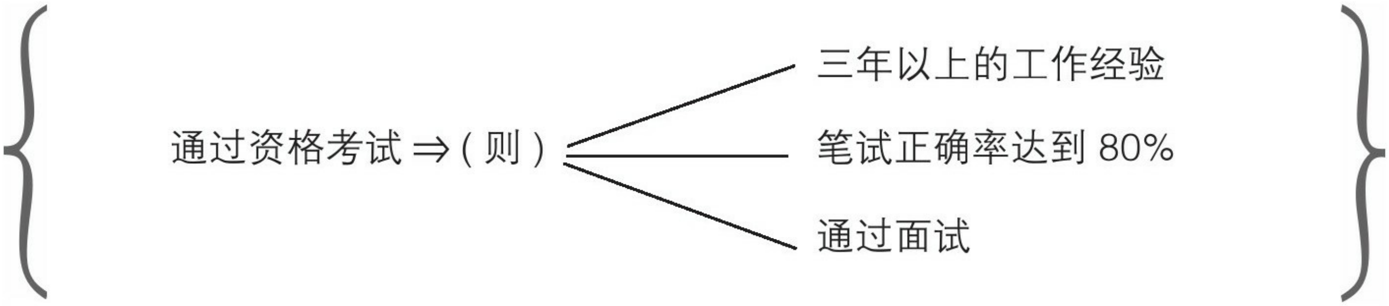
活用等价变换

把一件事情换句话说成等价的另一件事，我们称之为“等价变换”。但等价变换并不是只有在说服别人时才能发挥作用。

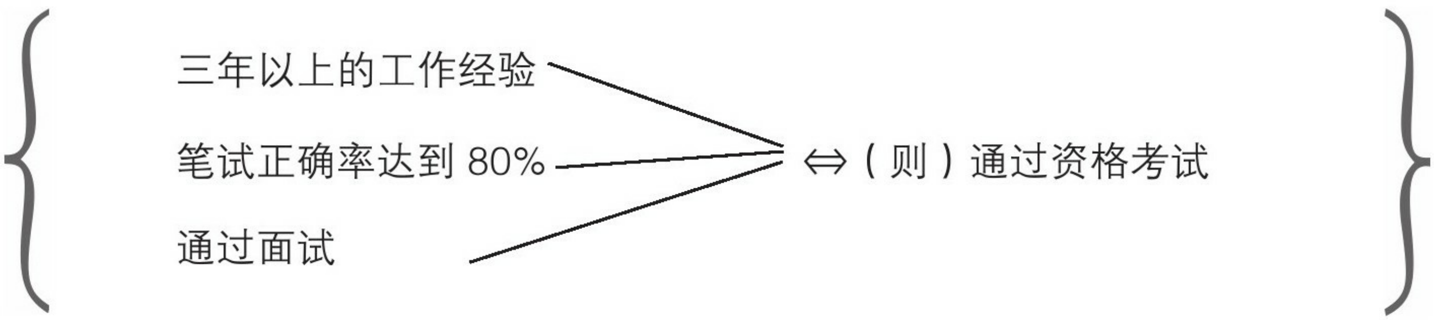
比如说，有一场专业资格考试，合格的条件包括三年以上的工作经验、笔试正确率达到80%，而且必须通过面试。工作经验、笔试和面试都是通过这场资格考试的必要条件，只有同时满足这三项条件的人，才能够通过这场资格考试。换言之，



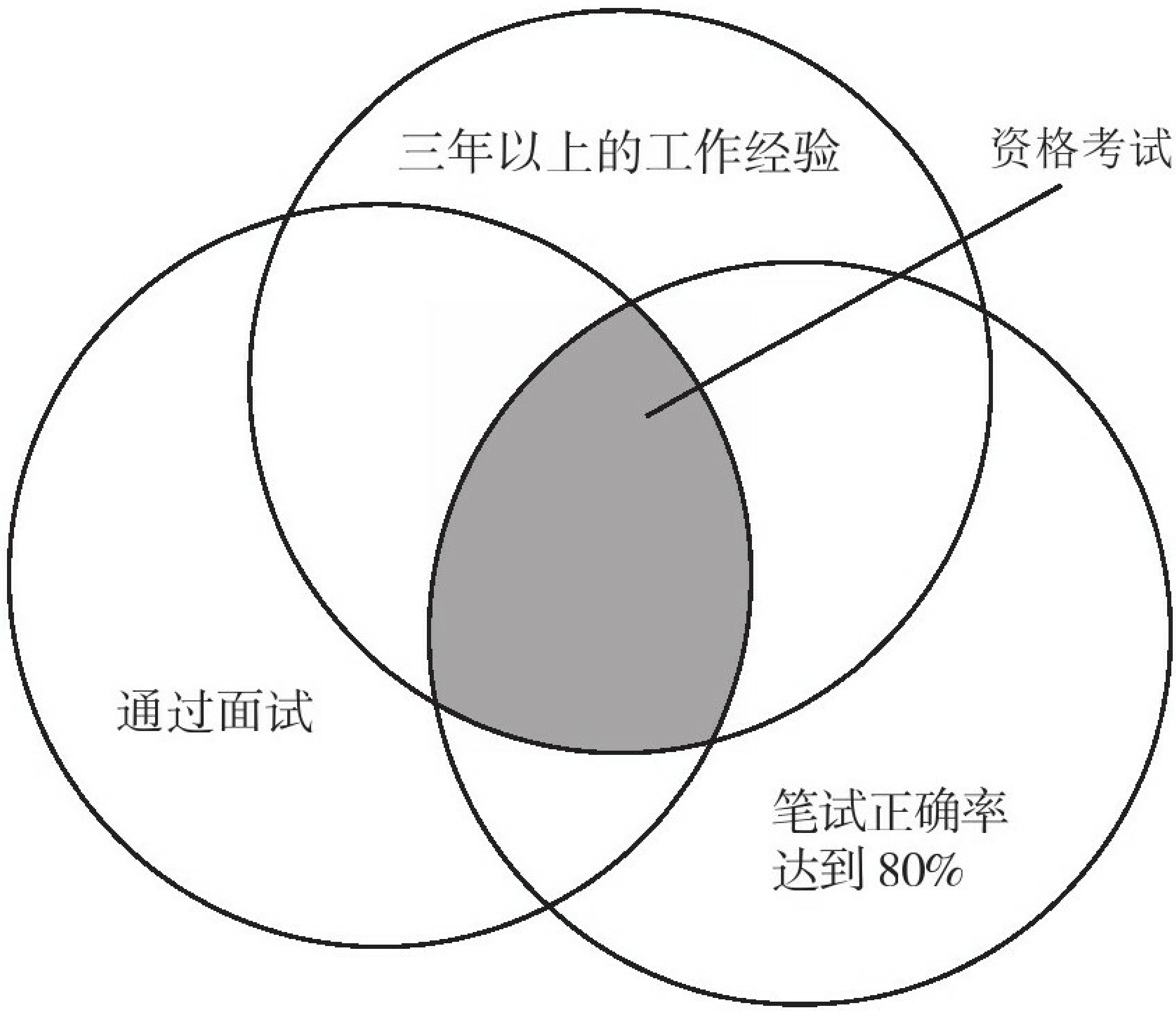
同时，



聪明如你，想必已经看出来了吧。“通过资格考试”和“同时满足工作经验、笔试和面试三项条件”互为充要条件。用“⇔”表示的话就是：



若以图像呈现，就会是这种感觉：



由于工作经验、笔试和面试这三项条件，各自的范围都比通过资格考试大（宽松的条件），因此若拆开来看，三者都属于必要条件，但同时满足工作经验、笔试和面试三项必要条件的范围，却与通过资格考试的范围一样大。

当几项必要条件重叠在一起成为充要条件时，对于试图追求特定目标的人来说特别有用。就像之前所举的例子一样，假如只是拥有一个通过考试的愿望，然后一个劲儿地祈祷“我想通过考试”，那么这样的愿望应该永远都不会实现吧？但是，如果把所有必要条件重叠在一起，找出通过考试的充要条件的话，就能够制定具体的目标，掌握明确的方向。就此例来说，我们只要知道“满足工作经验、笔试和面试三

项条件”与“通过资格考试”是等价关系，就可以把“想要通过考试”的心愿转换成“累积三年工作经验”“用功念书好在笔试中达到80%的正确率”和“培养实力以通过面试”的三种行动。换句话说，我们可以通过等价变换把希望转化为行动，等价变换的概念在这种时候也派得上用场。

理解函数

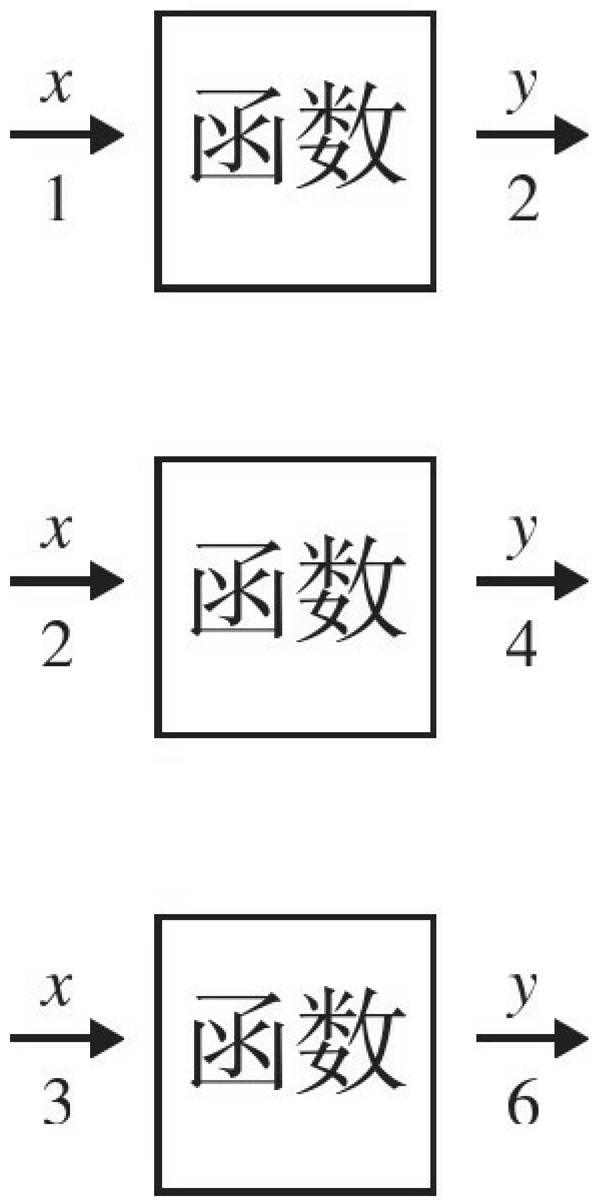
在平常的生活或工作中，很多时候我们不得不根据眼前的“结果”追究事情发生的原因，或是预测当下的行动将造成什么样的结果。在这样的情况下，大家应该都有光凭经验或直觉判断，结果却导致重大纰漏的经历吧。因此，接下来我将带大家学习如何正确地把原因变换成结果、把结果变换成原因。为此，我们需要使用一种很厉害的武器，就是函数。啊，现在冒出“哇！出现了！”念头的你，请先不要这么紧张！虽然函数的世界确实很深奥，但函数的基础绝对不难，而且我们在日常生活中会使用到的函数概念，只是极为基础的部分，所以请放120个心吧。

不知道各位是否知道，函数的“函”就是“把信投进邮箱里”的“函”，也就是“盒子”的意思。换句话说，“函数”就是“盒子里的数字”的意思。“盒子里的数字？”

想必你一定很困惑吧，让我解释给你听。这里所谓的“盒子”有两个口，一个是“输入口”，另一个是“输出口”。当我们从输入口放进某个值以后，输出口就会得出另一个值。不过输出值并非任意值，而是根据输入值决定的结果，而每一个输入值会得出什么样的输出值，全都遵循着一套规则。也就是说，函数是一个“根据特定的规则，把输入值变换成输出值的盒子”。

举例来说吧。假设这里有一个盒子，放进1会得到2，放进2会得到4，放进3会得到

6……你已经看出来了吧？没错，这个盒子的规则就是“输出值是输入值的两倍”。现在，假设我们从输入口放进去的值为x，从输出口出来的值为y（没有限制一定要用哪个字母），那么这个盒子的x与y之间的关系就是y=2x。若以图像形式呈现的话，就会像这样：



函数的内容：$y=2x$

此处最重要的一点，就是我们可以自由决定x的值。相对地，y的值则取决于x的值。这个时候，我们就把x称为自变量，把y称为因变量。所谓的自变量，就是不受任何外在因素制约的变量。“x为自变量”就是“把x替换为任何数字都可以”的意思。相对地，“因变量”则是无法自由决定值的变量。“y为因变量”就是“y值取决于其他数字（自变量）”的意思。像这样，当y值取决于x值的时候，我们就说y是x的函数。

接下来，我要给各位出一道陷阱题。当y2=x的时候，我们可以说y是x的函数吗？既然都说是“陷阱题”了，我想各位应该多少有点儿头绪了吧，其实y2=x的时候，y并不是x的函数。为什么呢？因为假设x=4，由于平方后等于4的数字有2和-2，因此我们无法确定单一的y值（正确的说法应该是，当y2=x时，x是y的函数）。

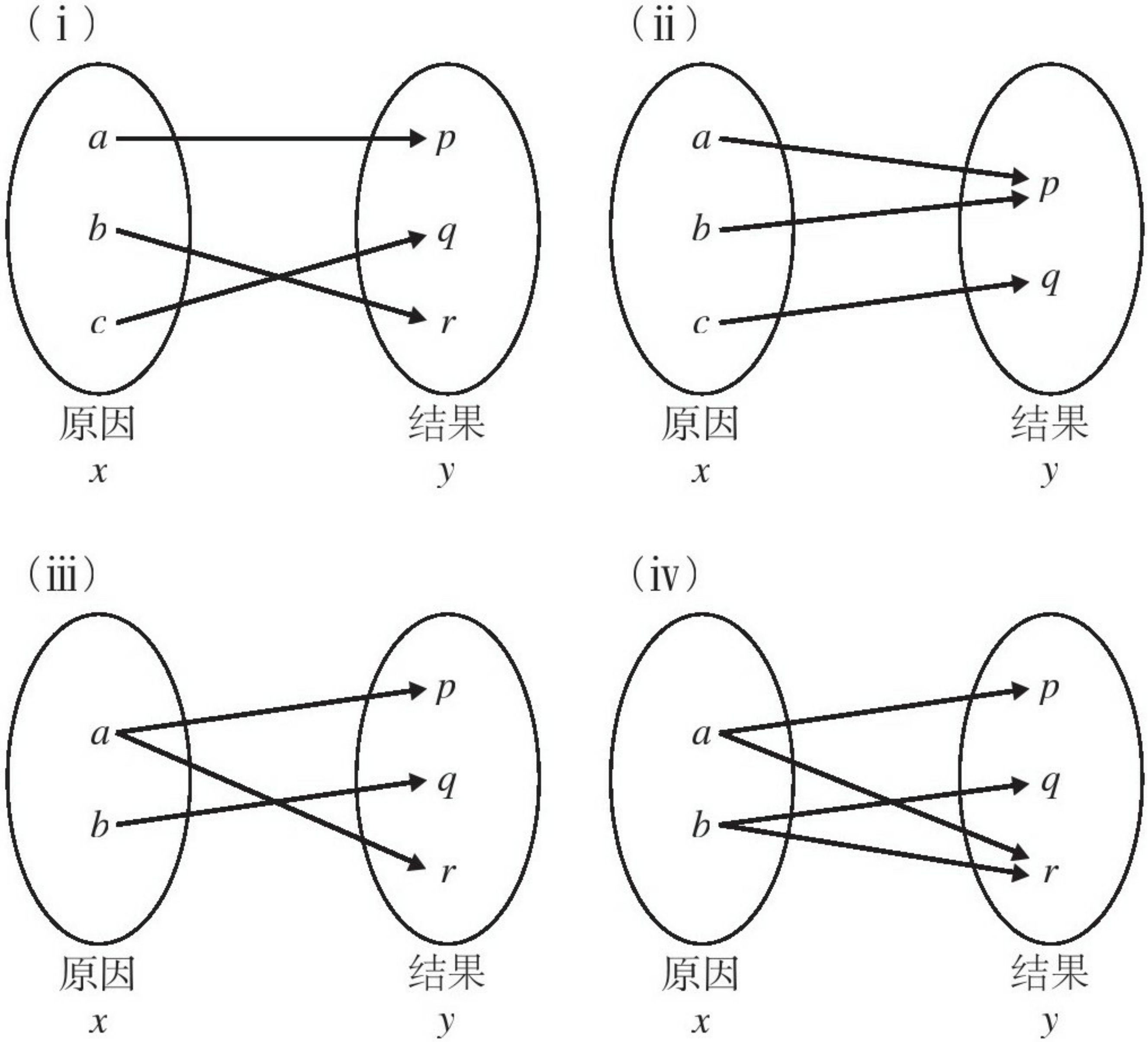
y2=4

y=±2

把式子像这样列出来以后，我仿佛听到有人说：

“这不是都已经求出两个可能的解了吗？还算不上是‘确定’吗？”

但此处执着于“单一解”是有理由的，因为我们必须让x和y之间形成对我们有帮助的因果关系。现在，假设输入值x是原因，输出值y是结果，一般来说，原因和结果之间的对应关系有下图四种情况：



（ ⅰ ）每个原因都对应特定的结果，且每个结果也都对应特定的原因。

（ ⅱ ）每个原因都对应特定的结果，但每个结果并不一定对应特定的原因。

（ ⅲ ）每个原因不一定对应特定的结果，但每个结果都对应特定的原因。

（ ⅳ ）每个原因不一定对应特定的结果，且每个结果也不一定对应特定的原因。

那么，请问在这几种类型当中，哪些对我们是有帮助的呢？首先，类型（ ⅰ ）的关

系毫无疑问是最一目了然的，只要知道某件事情的原因与结果属于类型（ i ）的关系，我们就能完全预料到未来即将发生的结果，同时也能确定过去某结果发生的原因。

类型（ ii ）又如何呢？在这种情况下，由于我们能够完全预测到未来即将发生的结果，因此可以安心地选择自己应该采取的行动。只是因为结果不一定会对应到特定的原因，所以也有可能碰到比较麻烦的状况。

类型（iii）有点儿让人伤脑筋呢。虽然能够确定过去某结果发生的原因，并不能说是一件完全无益的事，但如果无法通过原因预测到未来的结果，我们就不知道接下来要采取什么样的行动。很久以前，在移动电话尚未出现的年代，每次打电话到女朋友家，我都因为不知道接电话的人会是她本人还是她爸爸而紧张得提心吊胆，类型（iii）的情况就会带来这样的不安。

类型（iv）的话，老实说就是莫名奇妙啊。在这种情况下，两者之间根本没有任何因果关系。

综上所述，对我们来说能够安心选择未来行动的有益因果关系，就是每个原因都能对应特定结果的类型（ i ）和（ ii ）。不知道经过以上的说明后，你是不是已经了解到，原因（x）对应特定结果（y）的重要性了呢？

把结论汇总一下吧：

当y是x的函数时，

x是自变量（输入），y是因变量（输出），

x会对应到一个特定的y。

现在我们已经上完函数的入门课了，怎么样？函数并没有你想象中那么难吧？

函数才是真正的因果关系

好，接下来，让我们把对函数的理解应用到日常生活当中吧。众所周知，我们的生活中存在着许多因果关系。

- 她哭泣是因为男朋友忘了他们的纪念日。
- 他被上司骂是因为电车出事误点令他迟到。
- 经济泡沫化是因为市场价格上涨程度远超过实际价值。
- 没买到特价商品是因为平常坏事做得太多。
- 生意谈得很顺利是因为出门时先跨出右脚。

……

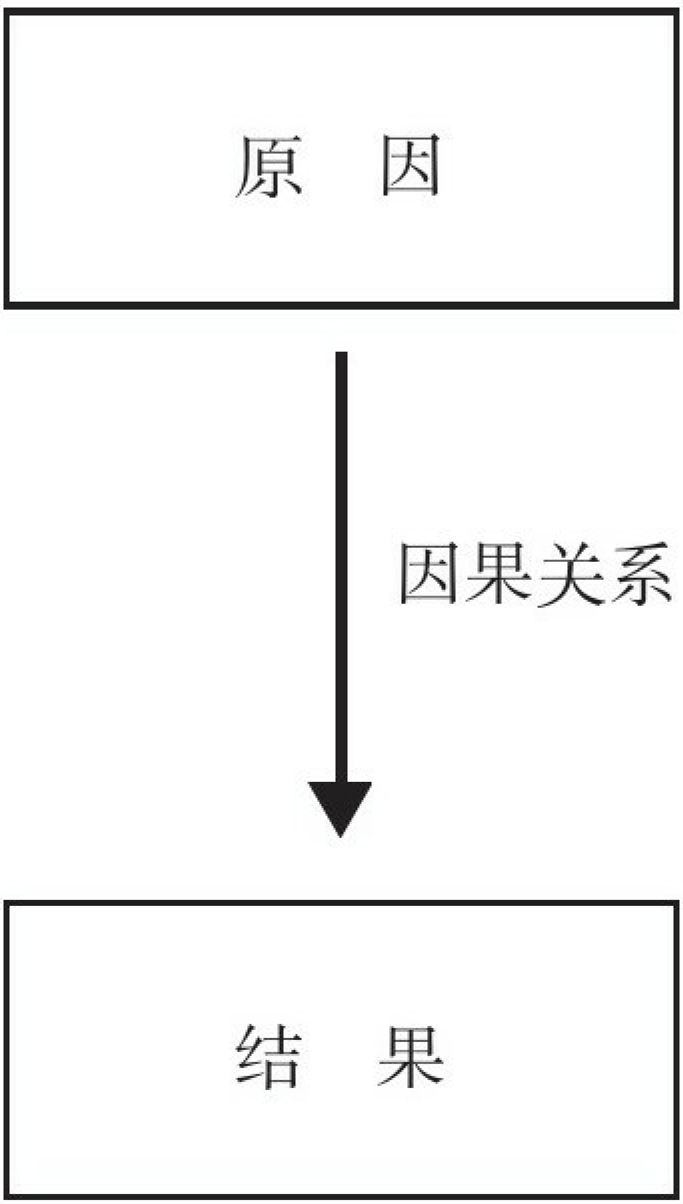
咦？其中某些例子好像没有因果关系吧？不过在我们的生活中，确实随处可见类似这样的逻辑。为了识别逻辑正确的因果关系，我们必须就眼前的结果，锻炼出发现真正原因的能力。

那么，究竟该怎么做，才能看出真正的因果关系呢？此处所谓的真正的因果关系，指的是“结果为原因的函数”的关系。如果原因独立于任何情况之外，且该原因只对应特定的结果，我们就可以说这是一个强而有力而且对于判断有帮助的因果关系。

①设想的原因是否为自变量

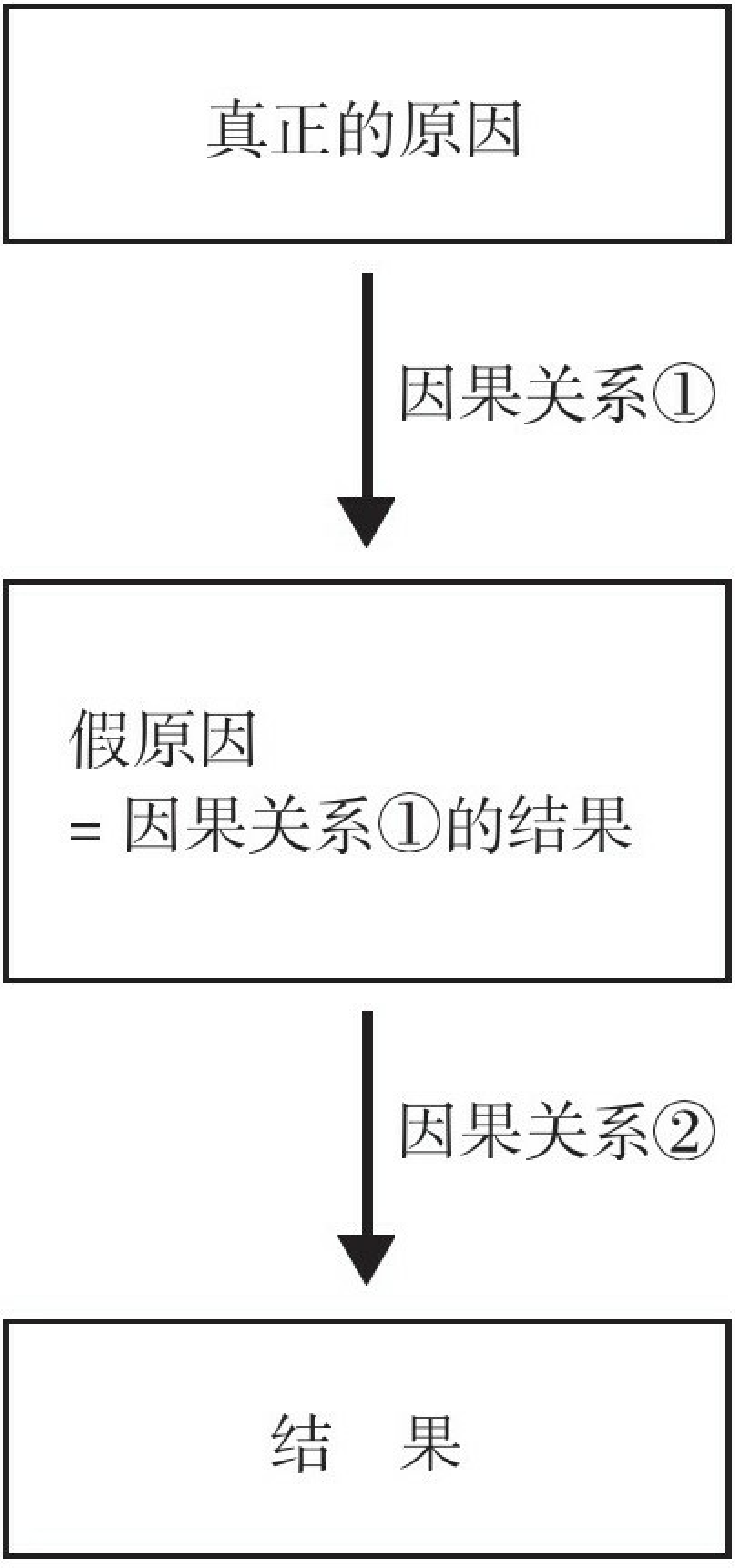
如欲识别出真正的因果关系，首先必须思考的问题，是我们所想的原因是否独立于其他情况之外（是否为自变量）。

由于真正的原因是一段故事中从原因到结果的起点，因此不会受到其他任何情况的制约。

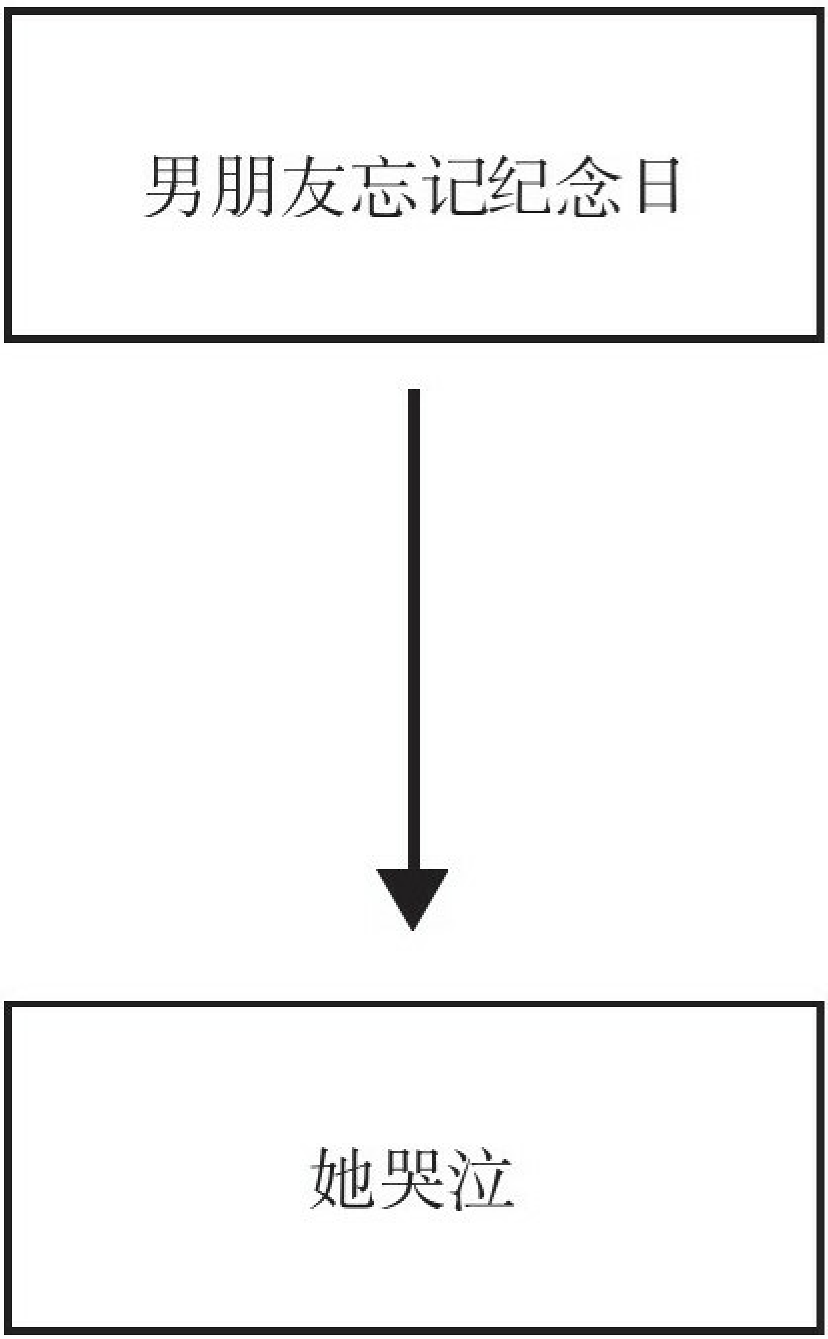


与此同时，一个乍看之下貌似原因的假原因，其实只是真正的原因的结果，而

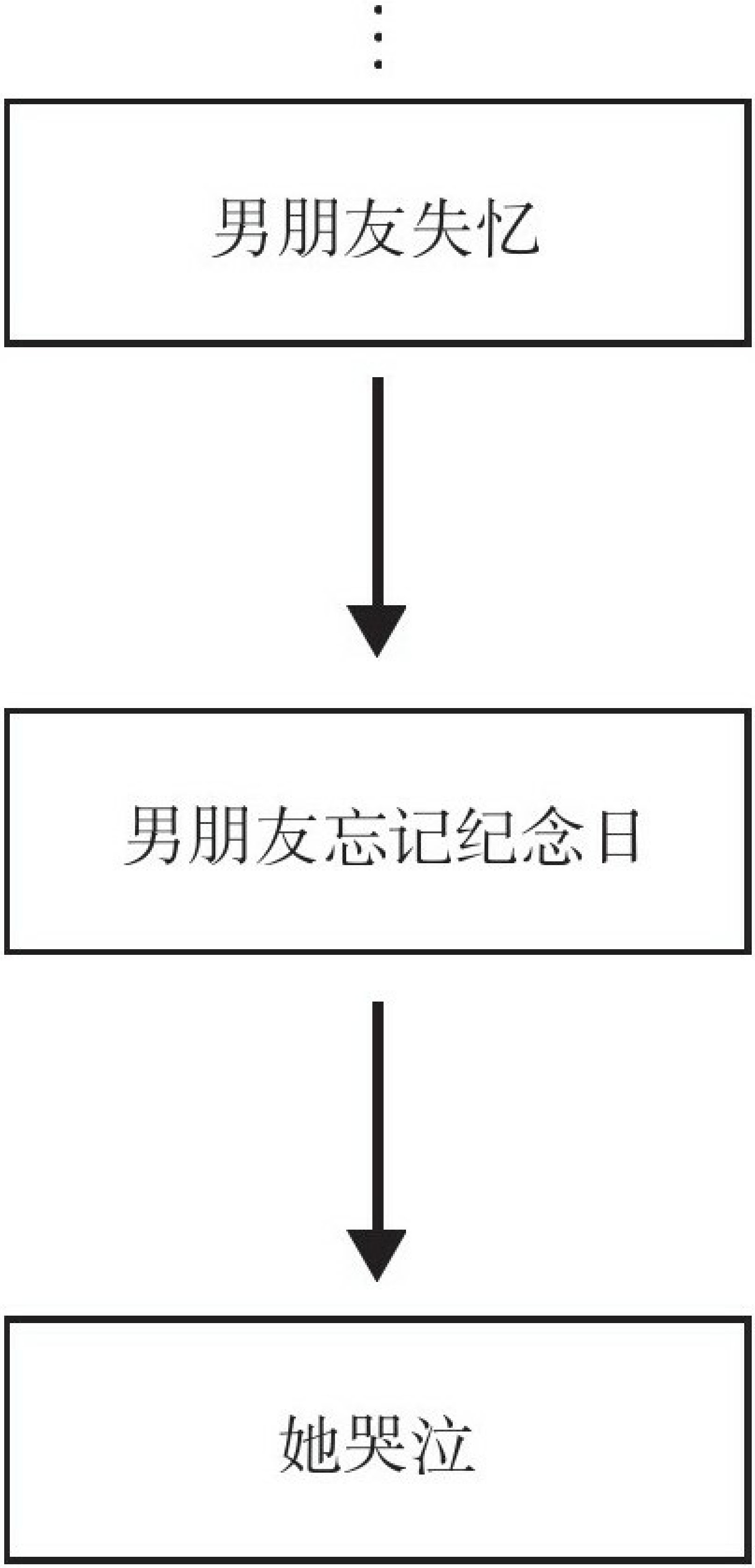
非“故事”的起点。在这样的情况下，我们必须识别出假原因是因果关系①的结果，并且探究出真正的原因。以图像呈现的话，就会像这样：


真正的原因
因果关系①
假原因
= 因果关系①的结果
因果关系②
结　果

我们来检验一下前述的“她哭泣是因为男朋友忘了他们的纪念日”吧。在多数情况下，会不会忘记纪念日这件事，并不受其他事情影响。换言之，这是一个自变量，而不是其他真正的原因的结果，所以我们应该可以把忘记纪念日这件事，视为导致她哭泣这项结果的原因，如图所示：



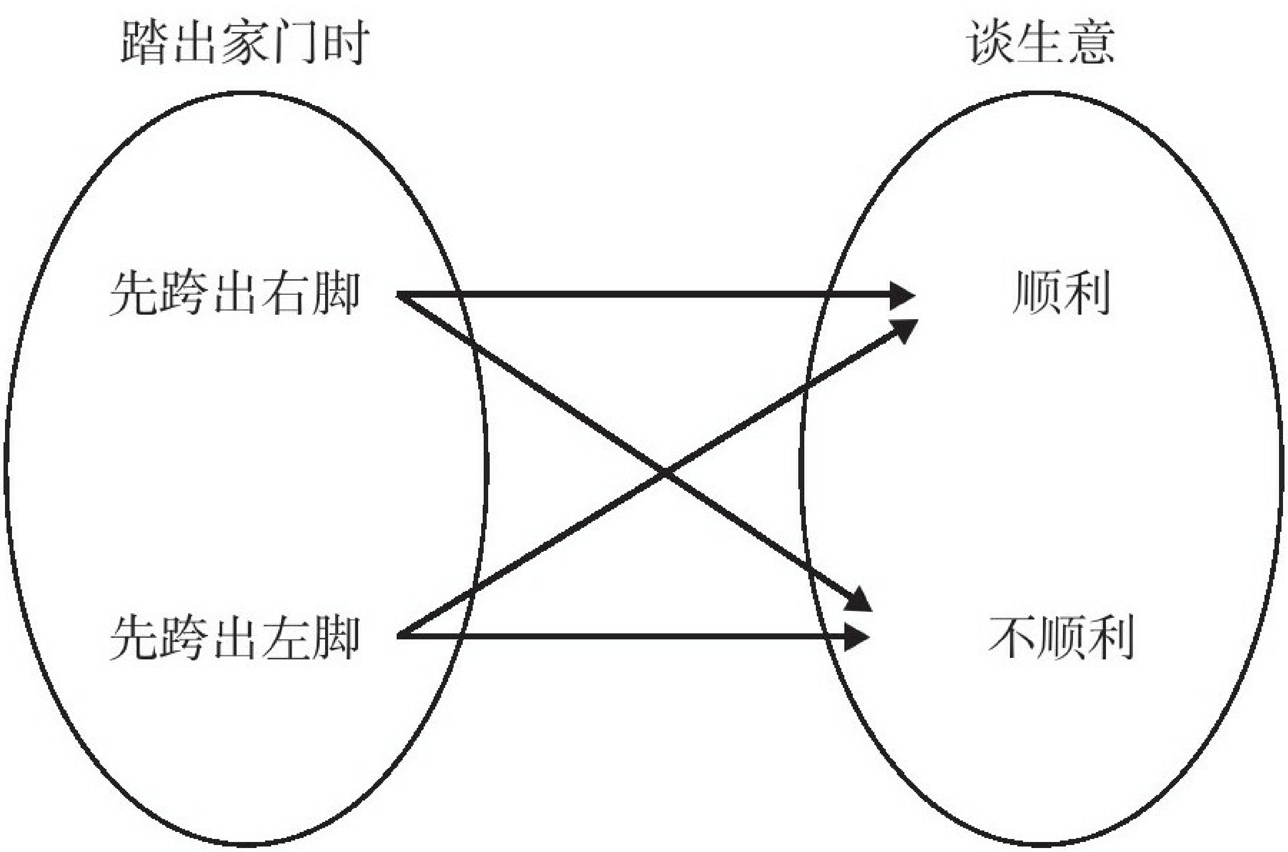
但是，如果男朋友是个失忆症患者呢（抱歉选了一个极端的例子）？这样一来，忘记纪念日就是失忆这项原因的结果，因此并未独立于其他情况之外。换言之，我们不能把它视为真正的原因。事实上，如果碰到这样的情况，她应该也不会为了男朋友忘记他们的纪念日而哭泣了。况且男朋友会失忆肯定也存在着其他的原因，所以我们也许可以推论她哭泣是因为最初的那项真正的原因，如图所示：


男朋友失忆
男朋友忘记纪念日
她哭泣

②“原因”是否只对应一种结果

接着我们来看看“生意谈得很顺利是因为出门时先跨出右脚”是否成立呢？首先，出门时先跨出右脚或左脚，确实不受其他情况制约，是一项自变量。

因为先跨出右脚所以生意谈得很顺利，这两者之间的因果关系符合逻辑吗？虽然我想答案各位已经心知肚明了，但我们还是一步一步来检验吧，毕竟就算类似的情况多不胜数（其实对于“多不胜数”这件事，也有必要加以验证），还是会出现反例，不可能每次用右脚跨出家门，生意就一定谈得成。反之，有时候即使用左脚跨出家门，也照样谈成了生意，当然也有用左脚跨出家门，生意谈不拢的情况。画成图的话就会是这样：



这种情况就是刚才的类型（iv）。因为这是一种牛头不对马嘴的因果关系，所以我们恐怕得另寻生意谈得很顺利的真正原因。

总而言之，函数就是一个把原因变换成结果的“盒子”，如果能够透视“盒子”中的内容物，我们就能够在自由选择行动的情况下，准确预测到未来即将发生的结果。人生在世，没有什么比这更令人安心的了。

话虽如此，并不是世界上的所有事情都能找到函数式的因果关系，也有很多变换过程不明的“黑盒子”。此外，这个世界变化无常，过去符合真正函数式因果关系的情况，在现代社会不见得说得通，所以全世界的科学家才会夜以继日地投注心血，针对各种情况探究真正的因果关系。

例如在心理学当中，我们把研究者可以对受试者自由设定的实验条件称为自变量，通过实验测定出来的结果称为因变量。从命名方式可知，研究者企图通过实验推导出函数式的因果关系，但心理学实验向来面临着一项困境，就是在设定自变量时，难以定夺适当的实验条件（原因）或是某些要素非属自变量，同时是否对受试者有重大影响，这些都可能导致实验无法获得正确的因变量（结果）。

在现实社会中，也有一些原因不一定会导致特定的结果，但导致该结果的可能性却高达80%。这种时候，认定两者存在某种程度的因果关系，并不能说是一件完全缺乏逻辑的事。但即使在这样的情况下，我们还是必须清楚地认识到，其中的因果关系并非绝对的函数关系。把那些有20%几率会发生预料之外结果的情况，误认为函数式的因果关系，是一件非常危险的事。

第④方面 抽象化

- 归纳出共同的性质
- 模型化

你还记得刚升上初中，第一次接触初中数学的时候，最先学习的内容是什么吗？日本初中一年级的数学课本，第一个单元是“正数和负数”。在那个还不习惯换成初中书包的时期，数学课本告诉我们：

“增加-2公斤的意思就是减少2公斤。”

19世纪的德国数学家克罗内克（Leopold Kronecker）曾说：“自然数是神造的，其他都是人为的产物。”所谓的自然数就是“1、2、3……”等正整数，而近期的研究已证实，海豚、猿猴和鸽子等动物也懂得使用这些数字计算数量。不过人类以外的动物，应该不太可能理解分数、小数或负数的概念吧，因为要使用自然数以外的数字，必须懂得一些概念，例如：

“$\frac{1}{3}$是把1个东西分成3份后的其中1份。”

“$\frac{1}{10}$是把1分成10份后的其中1份。”

“-2是在一条直线上，朝着与正数方向相反的方向前进2单位的距离。”

虽然说理解分数或小数需要具备基本概念，但我们可以把蛋糕切成3等份或是把纸裁成10等份，再通过眼睛具体捕捉这些信息，所以相较之下还算容易理解。不过如果是负数的概念，恐怕就没有这么容易理解了。

随着课程越来越深入，我们还会学到无理数和虚数等。无理数是无法用分数表示的

数，比如说π（圆周率）和$\sqrt{2}$就是无理数。如果用小数来表示无理数的话，π=3.14159265359……由于小数点后面的位数无穷尽，因此无法确定正确的值。另外，虚数指的是平方为负的数，是一种世界上不存在的数。如果想要理解这样的数，我们必须具备更深一层的概念。无论是哪一个，我们在一开始学初中数学时，都是通过负数开始练习理解抽象概念的。

那么负数之后的课程又是什么呢？没错，就是“用字母表示数”，也就是学习如何使用a或x等字母来表示数字。如果学习负数是为了训练我们用概念来理解世界的话，那学习用字母表示数的目的又是什么呢？就是学会如何把对象抽象化。

接下来这一节，我想带领各位探究的主题就是抽象化。

抽象化=推敲出本质

“抽象”的意思是：从许多事物中，舍弃个别的、非本质的属性，抽出共同的本质的属性。归根究底，数学是一门培养“透视事物本质”“推敲出眼睛看不见的规则或性质”等精神和逻辑思维的学问。即使把推敲出本质的抽象化说成是数学最大的目标，也绝非言过其实。

归纳出共同的性质

举例而言，假设这里有一串数字“2、4、6、8、10、12……”请问这些数字共同的性质是什么呢？是的，由于这一连串的数字都是偶数，所以这些数字的性质就是“可以用2乘以整数来表示的数字”。当然，我们可以像这样用语言来说明其本质，但如果用字母来表达的话，就可以用非常简单明了的“2n（n为整数）”来表

示。

由于这个例子比较简单，所以各位可能不太能感受到使用字母的好处，但假如换成下面的例子呢？

如果光看数字的话，是不是很难看出这些数字共同的性质？不过，假如用字母来表达这些数字的共同性质的话就一目了然了。可以简单明了地呈现出具体事物的共同本质，就是用字母代替数字的精妙之处。

1、3、6、10、15、21、28、36…

抽象化

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

（n 为自然数）

1、4、27、256、3125、46656…

抽象化

$$n^n$$

（n 为自然数）

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	…
1	1	2	3	5	8	13	21	…

抽象化

$$a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$$

（n 为自然数）

x	0	1	9	25	49	81	100	…
y	0	10	30	50	70	90	100	…

抽象化

$$y=10\sqrt{x}$$

质数（除了1和本身以外，没有其他因数的自然数）是无法再分割的数，也是数学当中非常重要的数，但由于其呈现方式非常不规则，也找不出共同的性质，因此至今仍然无法抽象化。换言之，人类在现阶段还无法用字母来表达质数。

关于质数的呈现方式，19世纪的德国数学家波恩哈德·黎曼（Bernhard Remann）曾经提出黎曼猜想（编者注：黎曼猜想是关于黎曼函数的零点分布的猜想，是世界七大数学难题之一，由数学家黎曼于1859年提出），但直到2013年6月，都还没有人能够证明该理论是否正确，美国的克雷数学研究所甚至为了黎曼猜想的证明，提供100万美元的悬赏金。

所有的质数：

2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61…

抽象化

？

黎曼猜想仍有待证明……

生活中随处可见的抽象化

当然，抽象化并不是数学的专利，平常在我们的身边也随处可见。我在前面说明整理是数学思考术之一的时候，曾经提到过整理的目的是为了增加信息，事实上整理时进行分类的过程，就是一种抽象化的过程。例如我们可以把马、鸽子、海豚和乌鸦这四种动物进行分类，如下所示：

哺乳类：马、海豚

鸟类：鸽子、乌鸦

不过马和海豚长得完全不一样，而且海豚看起来反而更像生活在海里的鱼类；鸽子和乌鸦的颜色也截然不同。但是撇开这些不同点，马和海豚都“以哺乳方式养育幼体，且都用肺呼吸”；而鸽子和乌鸦“全身长满羽毛，且翅膀相当发达”。找到这些共同点后，分别将四种动物分为“哺乳类”和“鸟类”，这就是标准的抽象化。

再深入分析的话，其实把马取名为“马”本身就是一种抽象化的行为。严格来说，每一匹马都有其独特的个性，只要不是复制马，应该都不可能找到另外一匹一模一样的马。但我们却无视每一匹马的个性，把所有具备共同特点的马，一律统称为“马”，这就是所谓的抽象化。说得极端一点儿，除了专有名词以外，任何为事物命名的行为基本上都是抽象化。

日本的中小学，分别自2002和2003年开始，实施学习指导要领（即宽松教育）。而无论是把该方针培养出来的时代称为“宽松时代”，还是把对学校、补习班抱怨连连的父母称为“怪兽家长”，都是无视每个人的个性、只看重全体共同性质的抽象化行为。任何人都无法否认的是，通过命名把对象抽象化，确实能带来一种快感，

尤其是现在的大众传播媒体或网络BBS，每天都在创造新的名字。

只是我们千万不能忘记，通过命名完成的抽象化行为，其实是一把双刃剑。就像数学家花了上百年研究如何把质数抽象化一样，从个别的具体实例当中找出共同的性质，本来就是一件非常困难的事。然而在不少情况下，我认为任意分类并命名的行为，反而会让我们无法看清事物的本质。所以还请各位多加注意，不要被这种似是而非的抽象化蒙蔽了双眼。

抽象化的练习

在此重申一遍，能够正确完成抽象化的能力，就是一种看穿本质的能力。我想不用说也知道，这种能力在我们的人生中扮演着相当重要的角色。那么究竟该怎么做，才能提升抽象化的能力呢？若按照前文所述，数学是最适合用来锻炼抽象化能力的学问，难道我们只能乖乖地重新开始学习数学吗？作为一名数学老师，虽然我很想对各位说一声：“一起加油吧！”（笑）不过其实各位在日常生活中就可以锻炼抽象化能力了，从你每天接触的五花八门的事物当中找出共同的性质或要素练习即可。举例来说，假如你每天上班都搭乘公交车和电车的话，你就可以思考：“把公交车和电车抽象化的话……就是‘不特定、多数人利用的交通工具’。”假如你最近这三天的午餐是汉堡、荞麦面包和牛肉盖饭的话，你就可以这样归纳：“把这三天的午餐抽象化的话……就是‘500日元以内、可以在10分钟内吃完的东西’。”

杂志《日经TRENDY》每年都有一个策划惯例，叫作“年度30大人气商品”。2012年的排行如下：

第一名　东京晴空树

第二名　LINE

第三名　廉价航空国内线

第四名　小丸正面

第五名　fit cut CURVE（剪刀）

第六名　JINS PC（防护眼镜）

第七名　滑子蘑栽培套件

第八名　麒麟减肥可乐

第九名　街区联谊

第十名　黑色系啤酒饮料

……

看起来好像没有什么共同点，但《日经TRENDY》对此排行榜下的结论是“2012年的人气关键词是‘积极’和‘创新’”。我想可能会有人对此有不同见解，不过这两个关键词看起来确实是全体的共同点，这也是一种稍具难度的抽象化。

只要不断积累经验，从复数事物当中找出共同点，久而久之就能锻炼出分析能力，请各位务必利用空闲时间多加练习。

模型化

除了找出复数事物的共同性质外，还有一种重要的抽象化方式，就是“模型化”。所谓的模型化，即把复杂的现实简化成单纯的模型。举例而言，著名的《壅塞学》作者兼东京大学教授西成活裕曾在《超有趣实用工作数学》中，用数学公式来表

示“人生的运气”，如图所示：

西成教授的运气公式

$$\frac{du}{dt}=ku-au^{2}+\sin t$$

u：运气

t：时间

k,a：比例系数

另外，我也曾就我平常对考生合格率的观察，归纳出一个数学公式。

永野的合格率公式

G（s,c，w,A）=kscw2+A

G：合格率

s：孤独感

c：危机感

w：正确的读书方式

A：学生本身的能力

k：比例系数

西成教授的运气公式是一个微分方程，u代表的是运气。左边的“ $\frac{du}{dt}$ ”是微分，不过这里不需要想得太复杂，只要知道它代表的是“运气会随时间产生变化”即可。

不过，“微分方程究竟代表什么意思”或“什么是三角函数”这些问题都不是我们要探讨的重点（有兴趣的可以查阅西成教授的著作），我想说的是，其实人生也可以简化成一个公式。

第一个“ku”代表的是正面因素，意思是“运气越好，越容易形成良性循环”（k是比例系数）。确实，一个人的运气越好，好运也越容易像滚雪球般越滚越大。只是在树大招风的日本，成功人士也特别容易遭到眼红的人扯后腿，所以第二个“au2”（a也是比例系数）代表的就是此类负面因素（相当于成名税）。另外，人生的运气就像上下波动的景气循环，光靠一己之力绝对无法抵挡时代趋势，因此最后的sint代表的正是此意（sint即三角函数，代表“波动”之意）。

另外，我归纳的合格率公式是一个函数。考生能否考上第一志愿，取决于学生本身是否拥有“没有人能帮助自己”的孤独感（s）、“再这样下去就糟糕了”的危机感（c）、正确的读书方式（w）等要素以及各项要素的程度。除此之外，虽然这些要素可能没有各位想得那么重要，但学生本身的能力也不是毫无关联。左边的G（s,c，w,A）代表G（合格率）是由s、c、w和A所决定的“函数”。在孤独感、危机感和正确的读书方式中，尽管读书方式的影响力最大，但三项要素缺一不可，因此右边的“kscw2”只有w为二次方，也就是s乘上c再乘上w2。而学生本身的能力将全面提升合格率，所以我选择以加号呈现A要素。

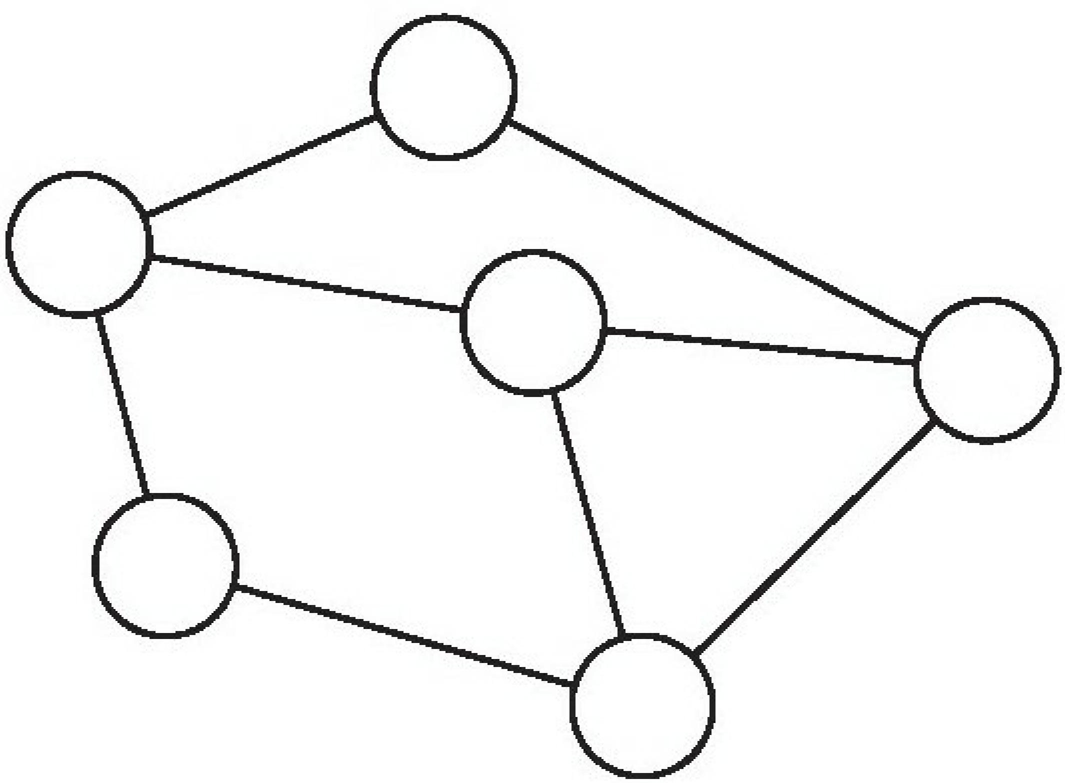
看到这里，肯定有很多人会觉得“不可能这么简单就以偏概全”。这个想法一点儿

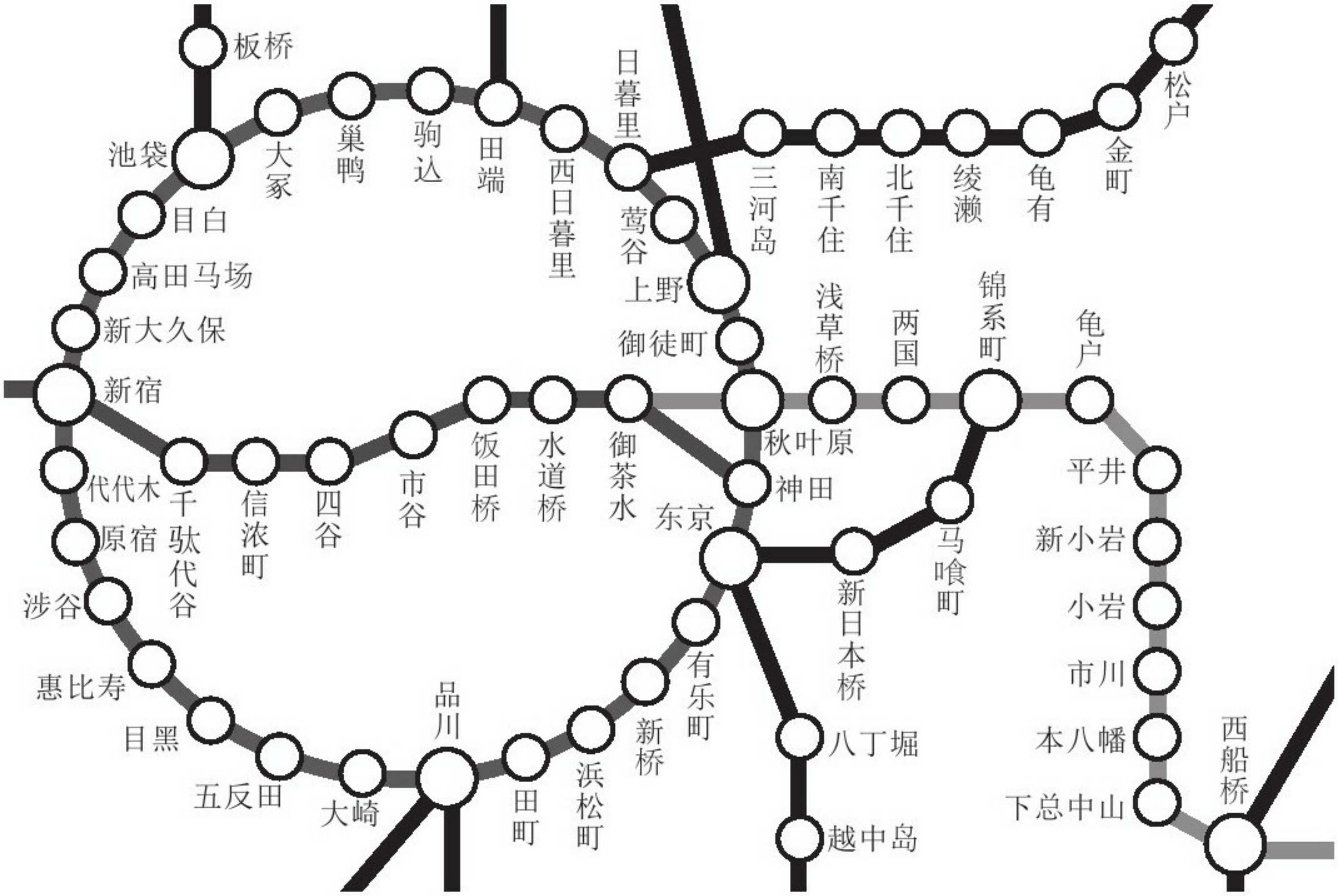
也没错，我们不可能光靠一个数学式就计算出人生的运气，西成教授想必也心知肚明。这一点对我来说感触更多，我无法对任何一个学生用单一的标准评价，但我们确实能够从这些数学公式中发现一些端倪。一旦我们根据某项假设把对象简化，势必会删去许多影响因素，于是此时就是我们发挥实力以及思考何者该保留、何者该删去的时候了。以下介绍的就是一种非常优秀的模型化实例——图论。

图论

这里的“图”指的并不是二次函数的图或是折线图的图。图论当中的图，指的是像下图这种“由点和点之间的连接”所构成的图。根据此定义，路线图就是最典型的“图”。

图论据说是著名的天才莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）为了解决“柯尼斯堡问题”而提出的理论。

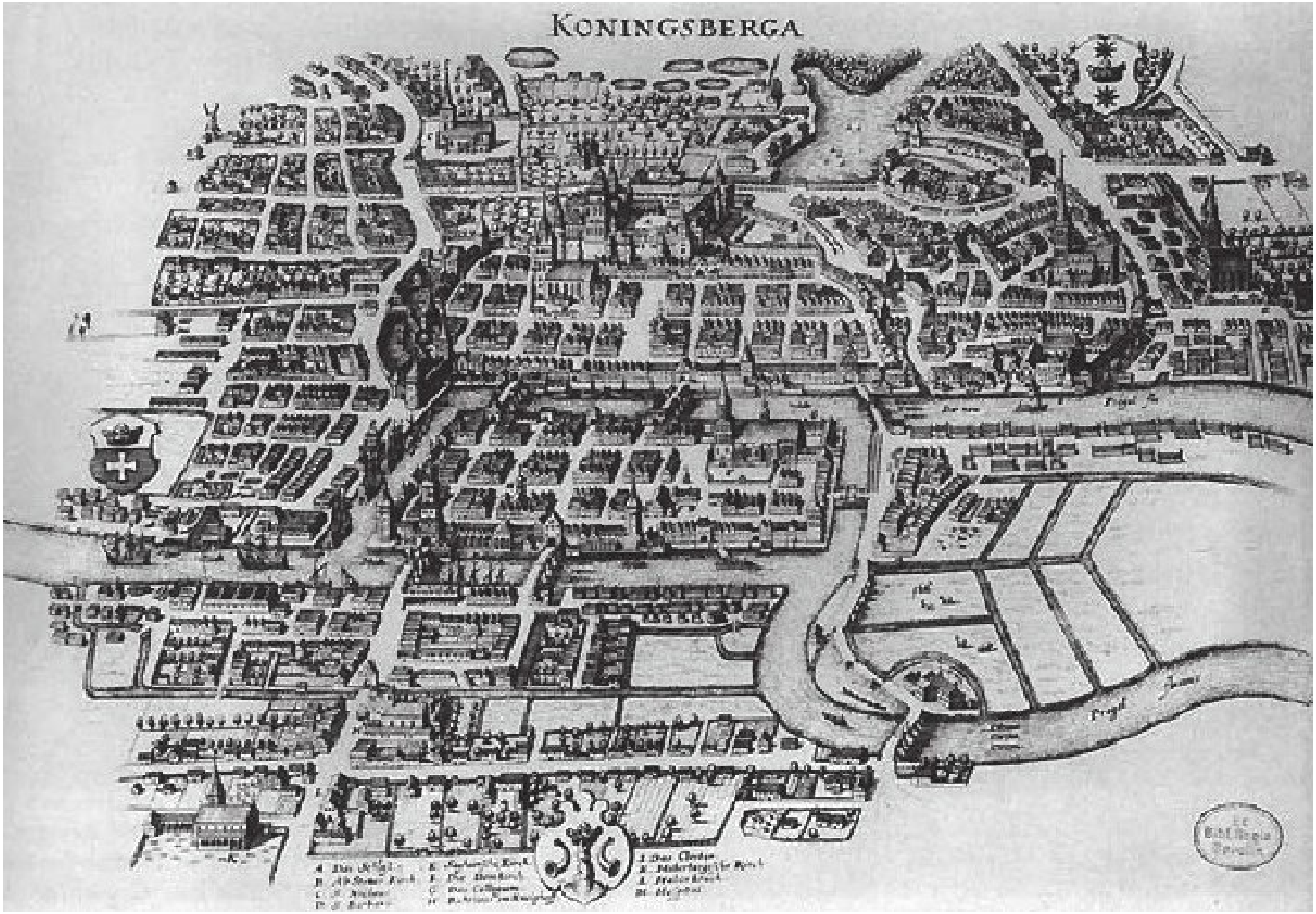




路线图

柯尼斯堡问题

从前，普鲁士王国的首府柯尼斯堡（今俄罗斯联邦加里宁格勒），有一条名为普列戈利亚河的大河流经，市区的中心如下图所示，位于河中央的小岛上。

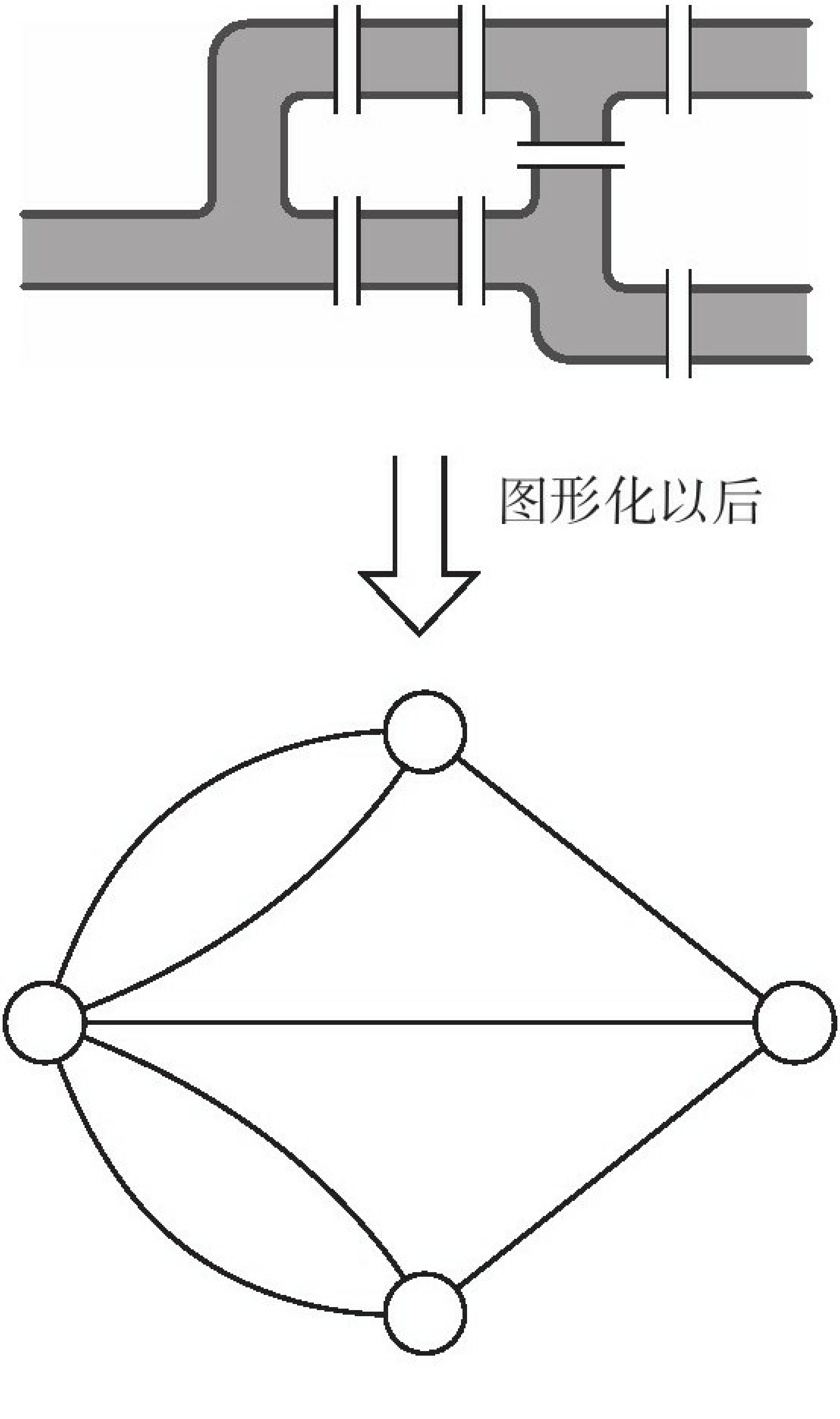


流经柯尼斯堡的河川与桥

当时，这条普列戈利亚河上总共建了七座桥，而不知从什么时候，人们开始热烈地讨论起一个话题：

“假设可以从任何一座桥出发，请问在七座桥都走且只走一遍的前提下，怎么回到出发点？”

在解决这道题时，欧拉把市区、桥和河川的关系，简化为下面的图像。


图形化以后

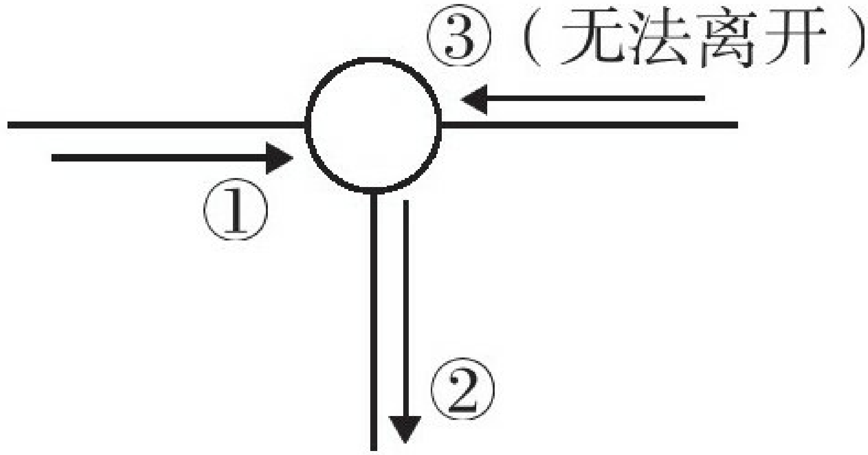
然后他通过证明此图无法一笔完成，从而做出“无法在七座桥都各走一遍的前提下回到出发点”的结论。他究竟是怎么做出答案的呢？

首先，他把焦点放在每一个〇连结的线条数上。当连结〇的线条数为奇数时，称该〇为奇点；当连结〇的线条数为偶数时，则称该〇为偶点。

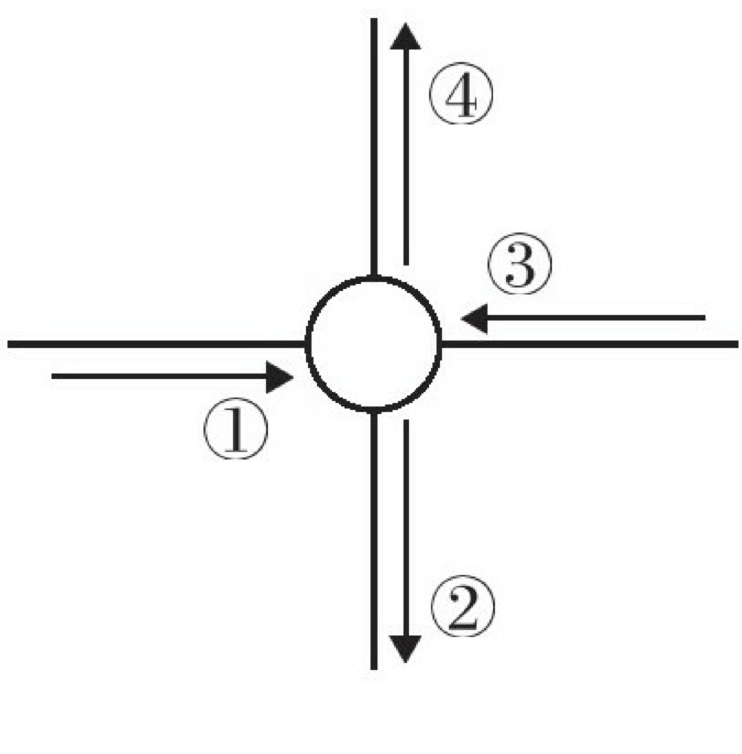
以奇点为例，各位可以思考一下，在有三条连接线的情况下，会怎样呢？在一笔完成图形的过程中，一旦经过此奇点，一入一出就会用掉两条线，所以下一次再进入此〇时，不会有任何线可以让人离开。换言之，第二次进去以后，就必须停留在原地，因此该奇点便成为终点。当然，无论线有五条还是七条，一出一入都会用掉两条线，所以只要〇为奇点，不管通过〇几次，最后还是只会剩下一条线，使该奇点成为终点。

至于在偶点的部分，由于进去的路和出去的路刚好组成一对，因此一律可以顺利通行。

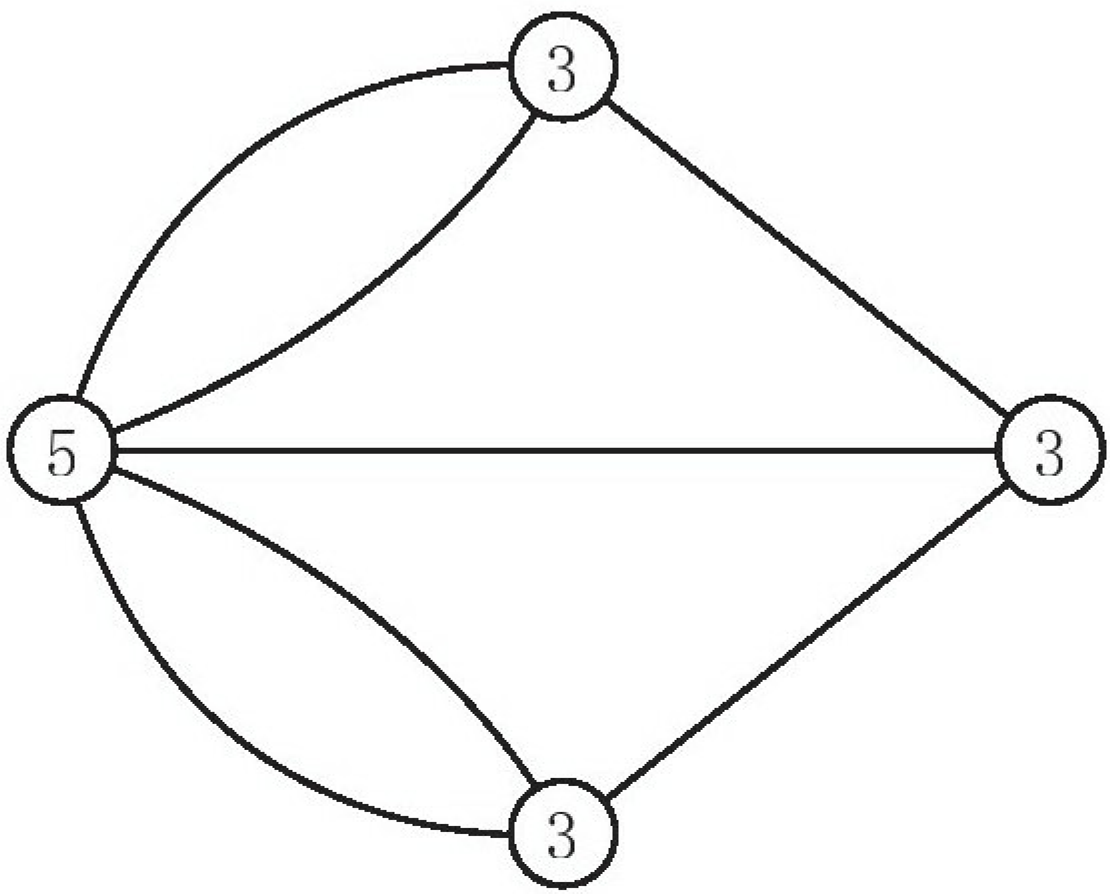
（1）奇点的情况



（2）偶点的情况



就这样，欧拉发现，可以一笔回到原位的图，〇处必须全部是偶点才行，又柯尼斯堡问题的图全部都是奇点，因此，此图无法一笔完成（圆圈里的数字，代表与该〇连结的线条数）。



皆为奇点

虽然，欧拉完全忽略了土地的形状、面积、桥的方向或长度等条件，只留下点和点之间的连接，但他成功地把本质模型化了，这就是“能够把复杂的现实单纯化”的模型化的精髓。

图论的应用

图论还可以应用在同样类型，的问题上。

铃木、高桥、田中、渡边、伊藤和山本是某公司的员工，这六个人必须在同一天出席多场会议。会议总共有六种类型，下表中标记○的部分是每一名员工必须出席的会议。假设所有会议的时长都一样（90分钟），请问如果想要尽早结束所有会议，应该如何安排会议的时程呢？

	①业务会议	②部门会议	③企业策划会议	④ A 专案会议	⑤ B 专案会议	⑥ C 专案会议
铃木	○	○				
高桥			○	○		
田中		○	○	○		
渡边	○				○	○
伊藤		○	○			○
山本		○			○	○

这道题乍看好像跟图论毫无关联，但若回归到这道题的本质，我们应该思考的是：“哪些会议不能在同一时段进行？”而根据此问题的本质，我们可以通过图论完成模型化。

图（ⅰ）的①～⑥是六场会议的代号。接下来，我们将利用这张图，把无法在同一时段进行的会议，用线连接起来。由于铃木必须参与①（业务会议）和②（部门会

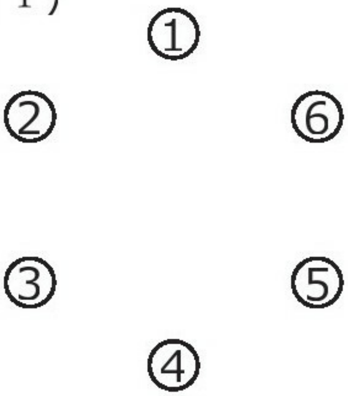
议），因此①和②不能在同一时段进行。

于是我们把①和②用线连接起来（ii）。

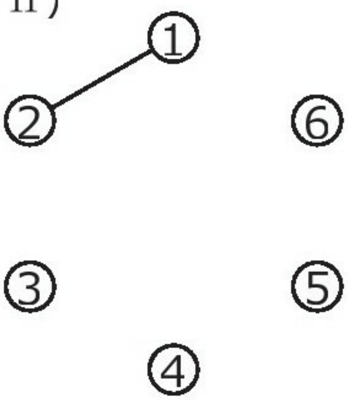
接下来，由于高桥必须出席③（企业策划会议）和④（A项目会议），因此③和④之间也用线连接起来（iii）。

同样地，把田中、渡边、伊藤和山本等人各自必须出席的会议用线连接起来以后，就会得到如（iv）的图像。

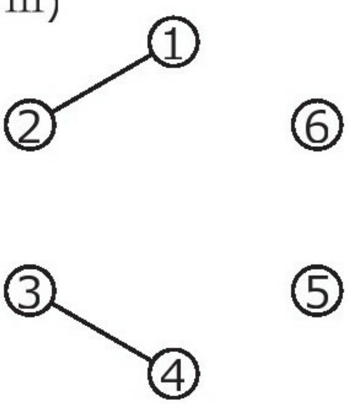
(i)



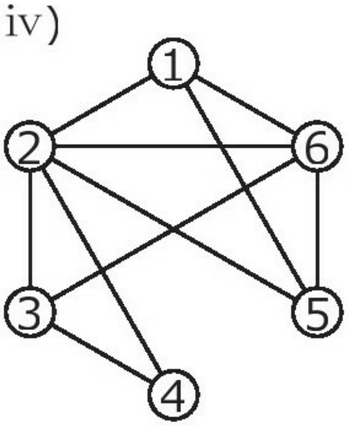
(ii)



(iii)



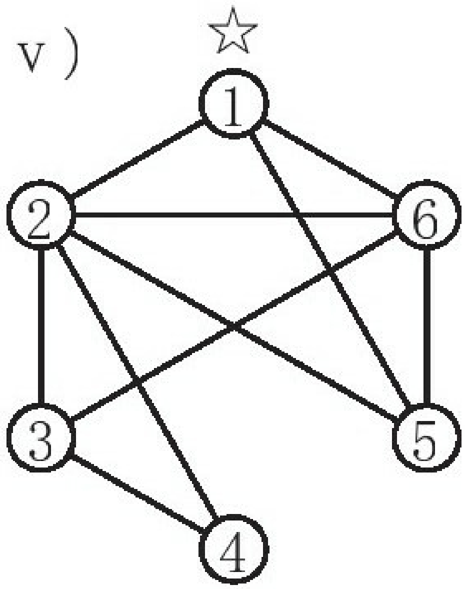
(iv)



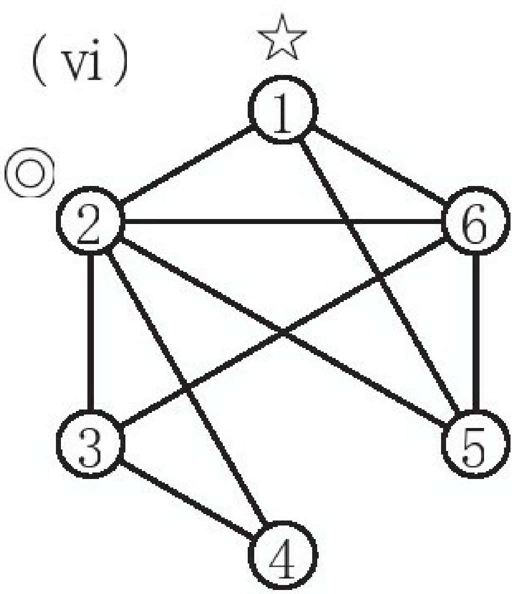
在图（iv）当中，所有用线条连接起来的会议，都无法在同一时段进行。现在我们可以根据实际来安排一下会议时程了。

首先，我们先在①的旁边画一颗☆记号（v）。做完①的记号以后，接下来就是从线条数较多（受限较多）的号码开始筛选。在②～⑥当中，由于②的线条数最多，所以我们先看②。由于②和①相连在一起，因此我们在②的旁边做一个◎记号，以跟①的☆记号区别（vi）。接下来线条数较多的是⑥。由于⑥跟①、②皆相连，因此我们在⑥的旁边做一个跟①的☆和②的◎不同的▲记号（vii）。

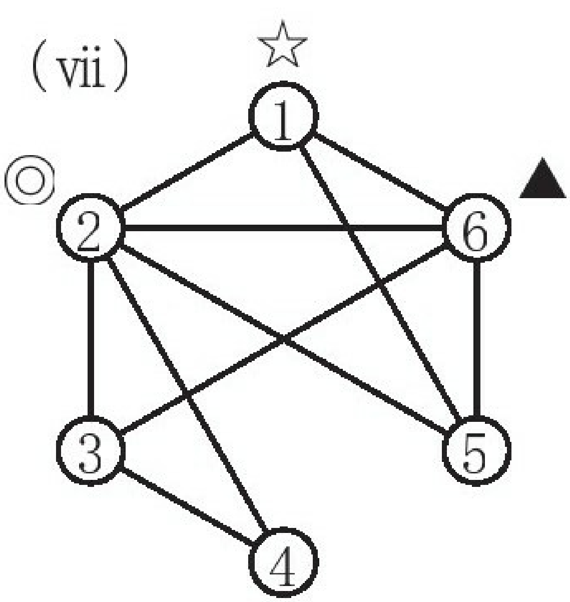
(v)



(vi)



(vii)



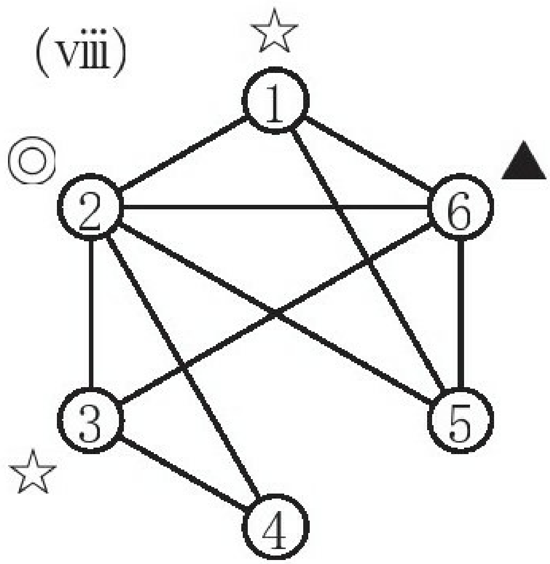
剩余的③、④、⑤当中，由于③和⑤的线条数相同，所以谁先谁后都无所谓，这里我们先从③开始看吧。

③虽然和②、⑥连接在一起，但和①之间并不相连，因此我们可以在③的旁边做一个跟①一样的☆记号（viii）。

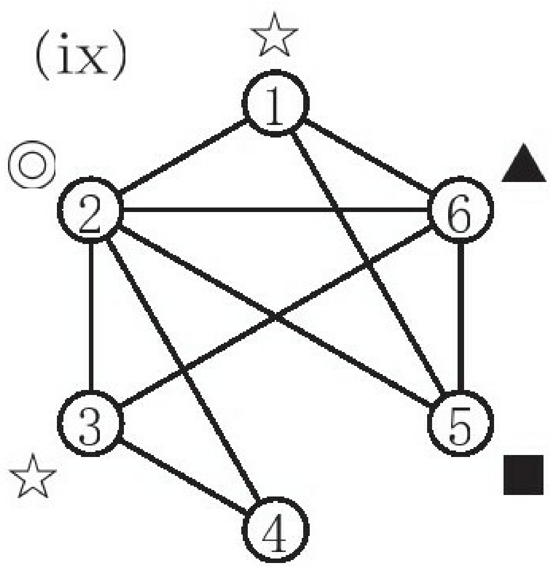
由于⑤和☆、◎、▲皆相连，因此我们在⑤的旁边做一个■的记号吧（ix）。

最后的④因为只跟◎和☆相连，所以可以使用跟⑥一样的▲记号（ x ）。

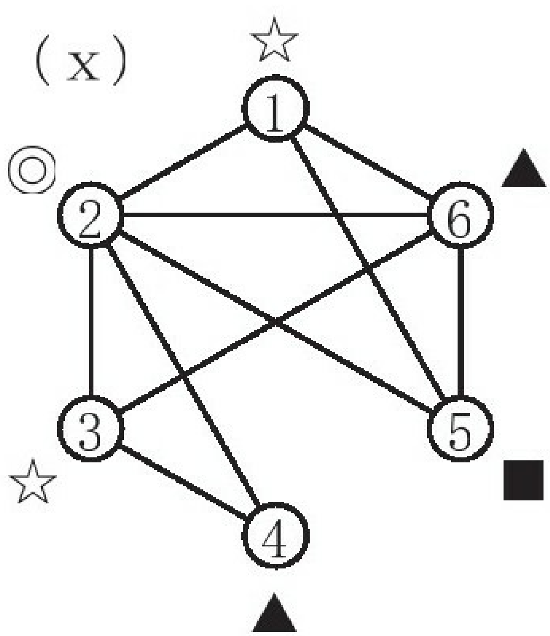
(viii)



(ix)



(x)



从完成的图像可以看出，由于记号相同的会议，两两之间并不相连，因此可以安排在同一时段。根据以上的结果，我们只要按照以下的时程安排会议，就可以用最有效率的方式，让所有人都出席必要的会议。

10：30～12：00（☆）①业务会议&③企业策划会议

12：00～13：00　　午休

13：00～14：30（▲）④A项目会议&⑥C项目会议

14：30～16：00（◎）②部门会议

16：00～17：30（■）⑤B项目会议

是不是没想到图论还可以用来解决会议时程安排的问题？此例清楚显现了模型化对本质处理的好处，这种方法也可以应用在其他的任务管理等问题上。

跟“归纳出共同性质”的抽象化比起来，模型化是更深入的抽象化方法，因此，实行起来并不容易。但是，在面对复杂的问题时，只要试着排除那些无关紧要的信息，就可以理清头绪、解决问题，所以还请各位务必挑战看看。

第⑤方面　具体化

- 成为说明高手
- 分别使用“演绎”和“归纳”

数学课本里的定理或公式，是人类智慧的结晶，中间潜藏着无比伟大的真理或概

念。只是当我们看到这些智慧结晶时，一律是已经被抽象化后的样子了。所谓的定理或公式，就是各种事例的共同法则或解决问题的分析方法，经过抽象化后虽然有了广泛通用性，但有时反而让我们难以通过想象理解其中的概念。举例来说，数学课本上有一句话是：

“速度（时速）是每小时前进的距离。”

然后下一句话是：

“可由‘距离÷时间=速度’求得。”

然而，几乎没有任何一个小学生能够单凭这两句话，就恍然大悟地说：“哦！原来如此。”所以我们这些当老师的人，才会提出类似这样的问题：

“假设太郎花了2小时走完6公里。请问他1小时走了几公里呢？”

通常只要这么一问，大部分的小朋友都会回答：

“3公里。”

接下来，老师就可以带领学生们思考“3公里”这个答案是怎么来的。如此一来，他们就会意识到，要求出“太郎小朋友每小时前进的距离”，亦即“太郎小朋友的速度（时速）”，只要计算“6公里÷2小时”即可。接下来老师如果继续提问：

“那么假设花子小姐花了3小时走完12公里，请问花子小姐的速度是多少呢？”

学生们就会回答：

“12公里÷3小时，是……（时速）4公里！”

只要引导学生到这一步，就不难让他们理解抽象化后的公式“距离÷时间=速度”是什么意思了。

作为一名数学老师，我经常苦苦思索如何才能把数学讲解得简单易懂，其实关键就在于能否结合听者已知的知识或经验，尽可能扩大听者的想象。在本节的前半部分，我想向各位介绍的是“如何通过具体化，让自己成为一个善于说明的人”。

提出具体实例

相信不用我说各位也知道，方才有关速度的说明就是具体的实例。只要先通过一些具体的实例扩大想象的范围，再进行整体的抽象化，听者就能够轻松掌握抽象化的概念。以下两段话就是运用具体实例进行说明的绝佳范例，分别出自代表昭和时代的日本的经营者：松下幸之助和本田宗一郎。

“盐巴的咸、砂糖的甜，都无法通过学问理解。但只要尝一口，即可了解个中滋味。”

——松下幸之助

“所谓的学校教育，应该是详细告知高中生骑摩托车时必须遵守的规矩以及危险性，而不是以教育之名没收他们的摩托车。”

——本田宗一郎

松下先生和本田先生分别以贴切的具体实例，说明纸上谈兵的徒劳以及实践的重要性，与其规避危险不如加以指导才是真正的教育。另外，在相对论中，指出时间的流动非绝对而是相对的爱因斯坦，在被问及“何为相对性”时，曾经作出以下回答：

“和美女共度1小时，只会觉得过了1分钟；但如果是在火炉上坐1分钟，却像过了1个小时这么久。这就是相对性。”

当然，这是爱因斯坦在面对大众媒体时，故意掺杂了个人幽默感的说法，但他所举的具体实例，确实让人更容易理解何为观者置身环境不同，同样的事物就会给人不同观感的“相对性”。

当我们试图对别人说明抽象的概念时，千万不要忘记运用具体实例，以便让对方更容易捕捉其中的概念。下面是我上课时讲解等差数列的过程。已经理解等差数列概念的人，也请试着用初学者的心态阅读下面的内容。

认识“等差数列”的第一堂课

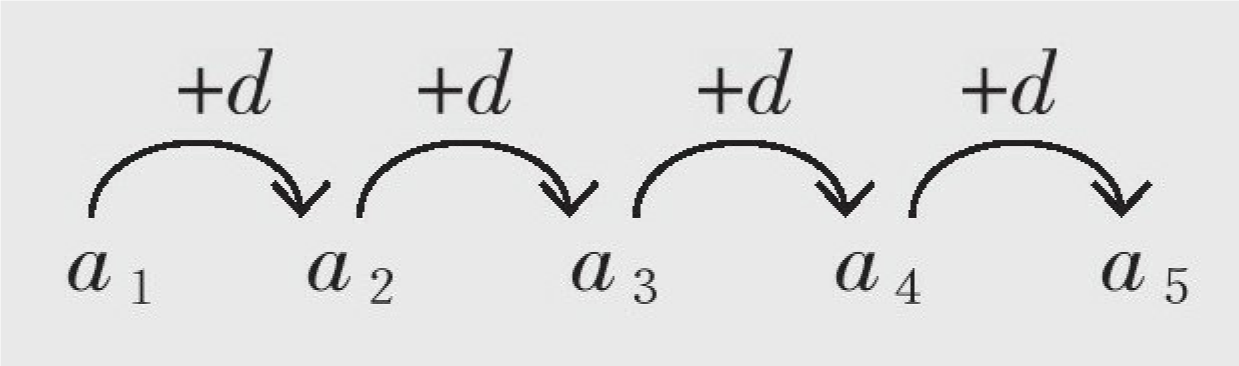
目标：让学生了解当an为等差数列时，

an=a1+（n-1）d

的概念（a1为首项，d为公差）。

【教学重现】

我：“听好啦！现在这里有一串从a1到a5的数列。这5个数字的间隔全部相同，我们假设间隔为d（边说边完成下图）。”



我：“如果想求a5的值，请问要用a1加几个d呢？”

学生：“4个（一脸理所当然的样子）。”

我：“没错。跟我们计算种树问题的方式一样（边说边摊开手掌）。如果是5只手指的话，中间当然就有4个指间。写成算式的话，就会是这样。”

a5=a1+4d

我：“那如果想求a10的值，请问应该用a1加几个d呢？”

学生：“嗯……9个吧？”

我：“没错！写成式子就是这样。”

a10=a1+9d

我：“那我们挑一个大一点儿的数字……如果要求a100的话，d会是……？”

学生：“99个！（直接打断我的话）”

我：“看来你们已经听懂了嘛，回答正确。”

a100=a1+99d

我：“那再请问，如果要求an的值，应该用a1加多少个d呢？”

学生：“嗯……应该比n少1，所以是……n-1吗？”

我：“就是这样！也就是说……写成算式就是这样，对不对？”

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

学生：“对！（放下心来的表情）”

我：“学得很快嘛。这种数列因为差距都相等，所以称等差数列，an是一般项，a1是首项，d是公差。”

“比喻”是具体实例的进化型

作为一名数学老师，影响我最深的人是长冈亮介教授。长冈教授目前是明治大学理工学部数学科的客座教授，而在我还是高中生的时候，他就已经是广播讲座和骏台补习班的人气讲师了。我那经常被形容为独树一帜的教学方式，就是源于高中时期时常令我豁然开朗的长冈教授的课。他让我重新认识并深刻体会到数学并非一门死记硬背的学问，而是一门必须自己动手，并且用自己的头脑思考的学问。

长冈教授在他最近出版的《有趣的东大数学入学考题：数学的经典鉴赏》前言中提到下面这段话，这也是他在补习班担任讲师时，经常对学生说的：

既然决定要学习，就不可以像吃饲料的马一样埋着头拼命做题。应该像享用一流厨师或母亲精心制作的充满爱的美味料理那样，心满意足地沉浸在那些能够让你身心成长、具有深度且值得用心思考的精彩问题所带来的乐趣当中。如此一来，年轻人的智慧便会出现惊人的成长，蜕变为一名能够理解精英分子的自豪、责任与哀愁的

人。

这段话当时也听得我满腔热血。

如今的学生被习惯性地要求在短时间内完成题目，因此都越来越少花时间去仔细思考。当碰到新的问题或是切入角度陌生的问题时，真的有很多学生的反应是我不会，而不是我想不通！如今已成为一名教育者的我，也对这种现象感到很遗憾……话题有点儿扯远了，总之我想在此强调的是长冈教授精妙的比喻。他把数学问题比喻为料理，完美地解释了反覆练习相同类型的题目是多么地没有意义，以及用心思考一个好问题又是多么地重要。比喻也是具体实例的一种，好的比喻能够在人心中留下深刻印象，比单纯的具体实例更能让人产生丰富的联想。就这层意义来说，比喻其实是具体实例的进化型。

从名言当中学习如何运用贴切的比喻

前文的松下幸之助、本田宗一郎和爱因斯坦说的话，都是名言。而很多像这样人们口耳相传的名言，结合了能够一语点醒梦中人的比喻，都比具体实例更贴切。我随便想想都能举出好几个例子，比如说：

“水就算是一滴一滴地往下掉，总有一天也会把水瓶装满。”

——释迦牟尼

“你们要进窄门。因为引到灭亡，那门是宽的，路是大的，进去的人也多。”

——《马太福音》

“唯有和着眼泪吞下面包的人，才能体会出人生的真味。”

——歌德

“人只是一棵芦苇，世间最脆弱的东西，但那是一棵有思想的芦苇。”

——帕斯卡

“传统是延续薪火，而不是崇拜灰烬。”

——古斯塔夫·马勒

“与其成为一轮借日光照映的明月，不如成为一盏自放光芒的灯火。”

——森鸥外

“人生好比一盒火柴，如果小心翼翼地对待它，是有些可笑；但如果不认真对待它，又相当危险。”

——芥川龙之介

类似的例子多不胜数，但以上每一句都是能够让人拍案叫绝的精彩比喻。

尤其是在说明一些难以理解的概念时，我建议各位可以从具体实例再深一步想想，看是不是可以用比喻。如果能够在说明时运用贴切的比喻，相信对方很容易就能理解吧。接下来，我们就以释迦牟尼的名言“水就算一滴一滴往下掉，总有一天也会把水瓶装满”为例，想想看，可以用什么方法创造出好的比喻。

首先，我们先来看看以下这些实例：

- 小时候每天练习单杠，慢慢就学会引体后翻了。

- 每天存10元，10年以后顺利带家人去了夏威夷旅行。

- 曾经活跃于著名球队的棒球选手松井秀喜，每次赛后都会单独和教练反复练习挥棒，最后成为当时最具代表性的打击手。

列出几个具体实例后，下一步就是挑出其中的共同点并加以抽象化。这一系列给人的感觉比较偏向“即使是微不足道的小事，坚持下去也会取得大成就”，或者套用一句俗谚，就是“坚持就是力量”。不过这两种说法都太普通，无法给人深刻的印象，因此我们必须找找看有没有更好一点儿的比喻，最好的办法就是从其他同样经过抽象化的具体实例开始寻找。前面的具体实例都跟人类的行动有关，因此寻找的范围请限制在“人类行动以外”的部分，如此一来，才能给人较深刻的印象。换言之，简化后的流程就是：

较近的具体例子→抽象化后的概念→较远的具体例子（比喻）

只要遵循这个步骤，我想应该不难像释迦牟尼一样，在比喻时联想到水滴一滴一滴落进水瓶里的样子，联想到钟乳洞成形后的状态，再以钟乳洞做比喻也是一个不错的选择。无论如何，只要以人类行动以外的事物做譬喻，听者应该就会觉得：

“原来持续做一件小事，慢慢积累取得大成就，并不仅限于人类的行动啊，这也许就是自然界的规律吧，好！我今天也要努力坚持下去！”

网上到处都是各种名言佳句，导致人们逐渐产生反感，但我个人其实很喜欢名言，因为其中浓缩了能够让人成为说明高手的精华。

寻找贴切比喻的方法

较近的具体例子

- 引体后翻
- 储蓄 10 元
- 松井选手的挥棒练习

↓

抽象化后的概念

持续努力即可累积成大成果

↓

较远的具体例子（比喻）

- 水滴滴满水瓶
- 钟乳洞

往返于具体与抽象之间

世界上有两种人，一种是善于说明的人，一种是不善于说明的人。在我看来，不善于说明的人大部分都可被归类为以下两种类型：

- 只说具体的事物
- 只说抽象的事物

举例而言，假设现在要向一个完全不知道何谓指挥家的人说明什么是指挥家，那么，只说具体事物的人会这样说明：

“莫扎特和贝多芬也做过指挥家，因为以前作曲家兼指挥是很普遍的事。据说第一个非作曲家出身的职业指挥家是一个叫作汉斯·冯·彪罗（Hans von Bülow）的人，不知道你有没有听过赫伯特·冯·卡拉扬（Herbert von Karajan）或是伦纳德·伯恩斯坦（Leonard Bernstein），他们都是20世纪后期相当活跃的著名指挥家。话说回来，卡拉扬来日本指挥柏林爱乐的时候，那场演奏实在太了不起了，其他指挥家根本没得比；日本的小泽征尔也很有名，他是卡拉扬的学生；还有动画《交响情人梦》中的千秋真一也是指挥家，像那样的指挥家都很受女生欢迎。”

虽然这样的说明相当具体，却无法让人理解指挥家到底是做什么的，但如果用抽象化的方式说明，就会变成：

“基本上就是通过手和手臂的动作指挥他人奏乐的人。”

这样的说明也很难让人产生联想，所以同样无法让对方对指挥家有正确的理解。相对恰当的说明应该像这样：

“在日本比较有名的指挥家是小泽征尔和佐渡裕等人。基本上，只要是站在管弦乐团、铜管乐团或合唱团前，负责带领众人合奏的人，就称为指挥家。在指挥家的工

作当中，如何统领正式演出前的练习也是很重要的环节，甚至有人认为这个部分比演出更重要。业余乐团为了让合奏跟上节拍，必须有一个指挥家来扮演类似节拍器的角色，不过就一个专业的乐团来说，指挥家的功能不只是让大家跟上节拍，更重要的是带领乐团成员在音乐之路上前进，也就是负责给予大家灵感。以著名的贝多芬《命运交响曲》开头为例，大家都听过‘噔噔噔噔’吧？要演奏出那样的音乐，拍子究竟要抓多快？哪个音的力道要多强？最后的音要拉多长？要弹出什么样的音色？这些微妙的差异都可能有不同的诠释方式。指挥家最重要的工作，就是决定这些作曲家在乐谱上没写出来的细节，而且指挥家自己是不能发声的。就这个角度来说，他们就像是马术竞技的骑手一样，在马术竞技中跳过栅栏或障碍物的是马而不是骑手，所以骑手必须在抵达障碍物前时，让马愿意配合地跳过去。另外很重要的一点就是，指挥家必须创造出一个适合演奏的环境，让乐团在演奏时不会因为外在事物打扰而分心。”

相信各位都看得出来，以上的说明往返于具体与抽象之间，结合了具体例子、抽象化和比喻等内容。像这样在说明中穿插具体和抽象的内容，听者也比较容易快速捕捉到其中的概念。

我在本书中介绍的“七个方面的数学式思考”包括：

①整理

②顺序概念

③转换

④抽象化

⑤具体化

⑥逆向思维

⑦对数学的美感

这是我在解过这么多数学题，并积累了数年的教学经验后，把解决问题的方法抽象化的精华。我在撰写本书时，刻意使用了数学以外的事例进行说明。简单来说，就是运用数学的具体实例，把解决问题的概念抽象化，再以数学以外的事例做比喻。所以我在本书中使用的说明技巧，就是标准的“往返于具体和抽象之间”。

截至目前为止的内容，都是有关提升说明能力的方法，后半部分我想解说的是如何以逻辑性的方式进行推论，当中又可分为“演绎法”和“归纳法”两种思考术。

演绎法和归纳法

演绎法和归纳法都是通过逻辑性的方式，由已知情况正确推导出未知情况的推论方法，不过两种方法的推导方向却完全相反。首先，演绎法是：“从适用于全体的理论（假说）推导出个别的情况。”

当我们看到美丽的樱花绽放时，推论说：

“樱花会凋落，所以这株樱花总有一天也会凋落。”

这就是演绎法的思考方式。另一方面，归纳法则是：

“从个别的情况推导出适用于全体的理论。”

以樱花的例子来说就是：

“去年、前年、大前年的樱花都凋落了，所以樱花一定每年都会凋落。”

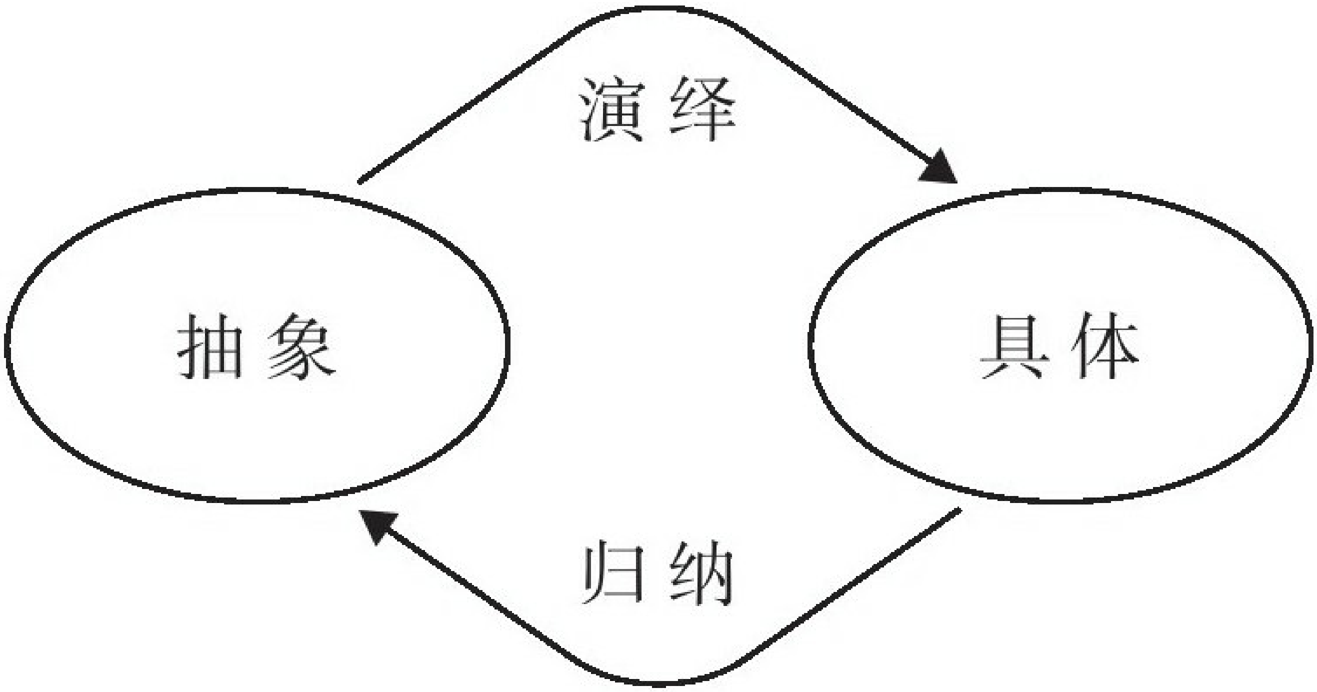
这就是归纳法的思考方式。

怎么样？虽然各位平常可能没意识到演绎法或归纳法之类的概念，但我认为两者都是我们在日常生活中经常使用到的思考方式。不如我再举一个例子好了，各位在学生时期的时候，学校一定都有一个考题出得特别难的老师吧？现在假设A老师就是这个老师。

“啊……明天有A老师的考试，题目肯定又是很难。”

这种就是演绎法的推论。这里的“A老师的考试总是很难”，就是把A老师所有考试共同的特性抽象化后的结果。相对的，“明天的考试会很难”就是所谓的具体实例。这种类型的演绎法，指的就是把抽象化后的情况，套用在具体实例上。

另一方面，假如A老师是去年刚来的新老师的话，“A老师第一学期、第二学期和第三学期的考试都好难，他真是个爱出难题考学生的老师啊（记得把这件事也告诉学弟、学妹）。”



这种就是归纳式的思考方式。这里的“A老师第一学期、第二学期和第三学期的考试都很难”是具体实例，相对的，“A老师的考试很难”，则是把A老师的考试共同性质抽象化后的结论。换句话说，所谓的归纳法，就是从多组具体实例当中找出共同的性质，再加以抽象化。将上述内容汇总后，即可简化为上面的图形。

演绎法和归纳法的缺点

虽然演绎法和归纳法都是被广泛运用的推论方法（大部分都是在不自觉的情况下），但我们还是应该知道两者都有各自的缺点。首先是演绎法的部分，当原始的理论（假说）有误，或是只能套用在受限的范围内时，就有可能造成“把理论（假说）套用在不适用的情况上”的危险结果。

举例来说，“精神障碍者容易成为社会事件的加害者”其实是一个错误的理论（假说）。事实上，根据日本警察厅的统计，2000年的交通事故以外的刑事被检举人约

有31万人，其中精神障碍者（警方判断，含疑似精神障碍者在内）有2071人，占全体的0.67%，比例远低于精神障碍者在15岁以上的人口所占的百分比（1.84%）。此外，与杀人或杀人未遂有关的精神障碍者为132人，比例为0.006%。当人们无视于此事实，仅凭对精神障碍者的偏见或先入为主的观念建立一套理论（假说），并以演绎式的思考方式认定“前阵子的随机杀人事件，犯人肯定是精神障碍者”时，这就属于一种错误的推论。

另一方面，归纳法的缺点则是：在无法验证所有事例或提出同等的逻辑证明的前提下，最后得到的抽象结论不见得是无法动摇的真理。在我们以归纳式推理得出抽象的概念后，千万不能忘记其中含有相反要素的几率，我们顶多只能判断“这样发展的可能性很高”而已。

不久前（2013年6月），“行星形成理论与目前的理论不一致”的话题，在全世界掀起一股热潮。现今的行星形成理论是通过对太阳系或其他星系的观测而归纳出的结论，不过哈勃太空望远镜观测到的恒星（长蛇座TW星）所呈现的行星形成征兆，若从位于中心的TW星质量或年龄来考虑，却与以往的理论不符。若此观测结果无误，人类可能必须重新改写行星形成理论。当过去归纳出来的理论，碰到与现在的理论不符的具体实例时，重新改写是自然科学史上经常发生的事，人类也才得以更接近真理。

虽然演绎法和归纳法都是相当基本且重要的推论方法，但如果不了解两者的缺点，将有可能引导出错误的结论，因此必须特别注意。

假设现在有一个一元二次方程x2+5x+3=0。由于

ax2+bx+c=0时， $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

因此套入这个“一元二次方程的公式解”后，

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$$

此解法是将一般的公式套入个别案例中，因此属于演绎法。

另一种情况，假设我们从最初的一元二次方程式开始求解：

$$
\begin{aligned}
x^2+5x+3=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+3=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad x+\frac{5}{2}=a\sqrt{\frac{13}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}
\end{aligned}
$$

接着导出

ax2+bx+c=0时， $x=\dfrac{-b \pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$

此时，由于公式解是从个别的案例导出一般的公式，因此属于归纳法。

什么情况适用演绎法和归纳法

现在你已经了解何谓演绎法和归纳法了吧？那么这两种推论方法各自适用于什么情况呢？

我们来看看下面的例子吧。假设有一家文具制造商，计划开发一项新产品。开发的过程应该包含以下各阶段：

调查→策划→设计→测试→推销

调查：调查时下最热门的商品。

具体决定要调查什么样的商品、针对什么样的项目进行问卷调查统计，这些都属于演绎法。接下来，得到具体的数据后，利用统计等方式，将热门商品的共同设计、性能、价格等数据进行抽象化，这时候就需要运用到归纳法。

策划：根据的结果构思新商品。

由于前景看好的商品数据，已经在调查中经过抽象化，所以接下来就可以开始思考新商品的具体细节。此处的流程是从抽象到具体，因此属于演绎法。

设计：结合现有技术和新技术，研究出制作新商品最佳的方法。

将已完成理论化（确立）的新旧技术具体运用在新商品的制作上。即演绎法。

测试：完成试验品后，通过使用实验、顾客试用调查等，找出设计上的问题和可改善的地方。

实验方法和调查项目的选定，和调查一样以演绎法进行，得到具体的资料后，再以归纳法进行统整。

推销：解决了测试时发现的问题，并正式完成商品后，即可开始规画如何推销商品。

为了把演绎和归纳的思考方式运用到推销上，此处将采用稍微广义的解释，思考新商品的几项特征如何抽象化为“结论”，以作为推销时的“卖点”。当此产品有能让人留下深刻印象的“卖点”时，演绎式的提案或许是比较好的方式。例如：

“敝公司这一次推出的圆珠笔，墨水永远都不会用完哦！”

像这样先说出令人印象深刻的结论（卖点），应该就能勾起对方的好奇心：

“什么？你说这句话是什么意思？”

接下来你只要再具体地说明：“意思就是……”对方应该就会兴味盎然地听你把话说完。反之，当“卖点”给人的印象不够强烈时，即使一开始就告诉对方：

“敝公司这一次推出的圆珠笔，价格是90日元，比其他商品还便宜10%哦。”

“这样啊。”

像这样，对方可能也不会积极地听你说明。在这样的情况下，不妨先从具体的内容开始介绍：

“前阵子A公司推出的圆珠笔是100日元，B公司也推出新款的圆珠笔，写起来比A公司的更顺手，价格是110日元，而我们公司这一回开发出了比B公司更好用的圆珠笔。”

接着再告知对方：

“而且我们的价格只要90日元。”

如此一来，对方原本的预期是：性能比B公司好的产品，价格应该比较贵，结果却出乎意料地便宜，于是开始对你说的话产生兴趣。先从具体实例开始说明，最后再带出最想告知对方的结论（卖点），只要使用这种归纳式的手法，就能够弥补卖点不够吸引人的弱点。

怎么样？虽然最后的推销部分并不属于推论，因此严格来说，使用演绎或归纳等字眼并不恰当，但把“结论（抽象）→具体”解释为演绎、“具体→结论（抽象）”解释为归纳，其实就只是扩大演绎和归纳等思考方式的运用范围而已。

即使只是发出一份问卷，题目的选定就是一种演绎法，而问卷数据的统计整理就是一种归纳。像这样交错使用演绎与归纳，可帮助我们发挥极大的力量。只要能够意识到演绎与归纳的交错运用，以往没注意到的思考过程也会变得清晰明确，对于创意的发想或商品的营销肯定有所帮助。还请各位务必一试。

第⑥方面　逆向思维

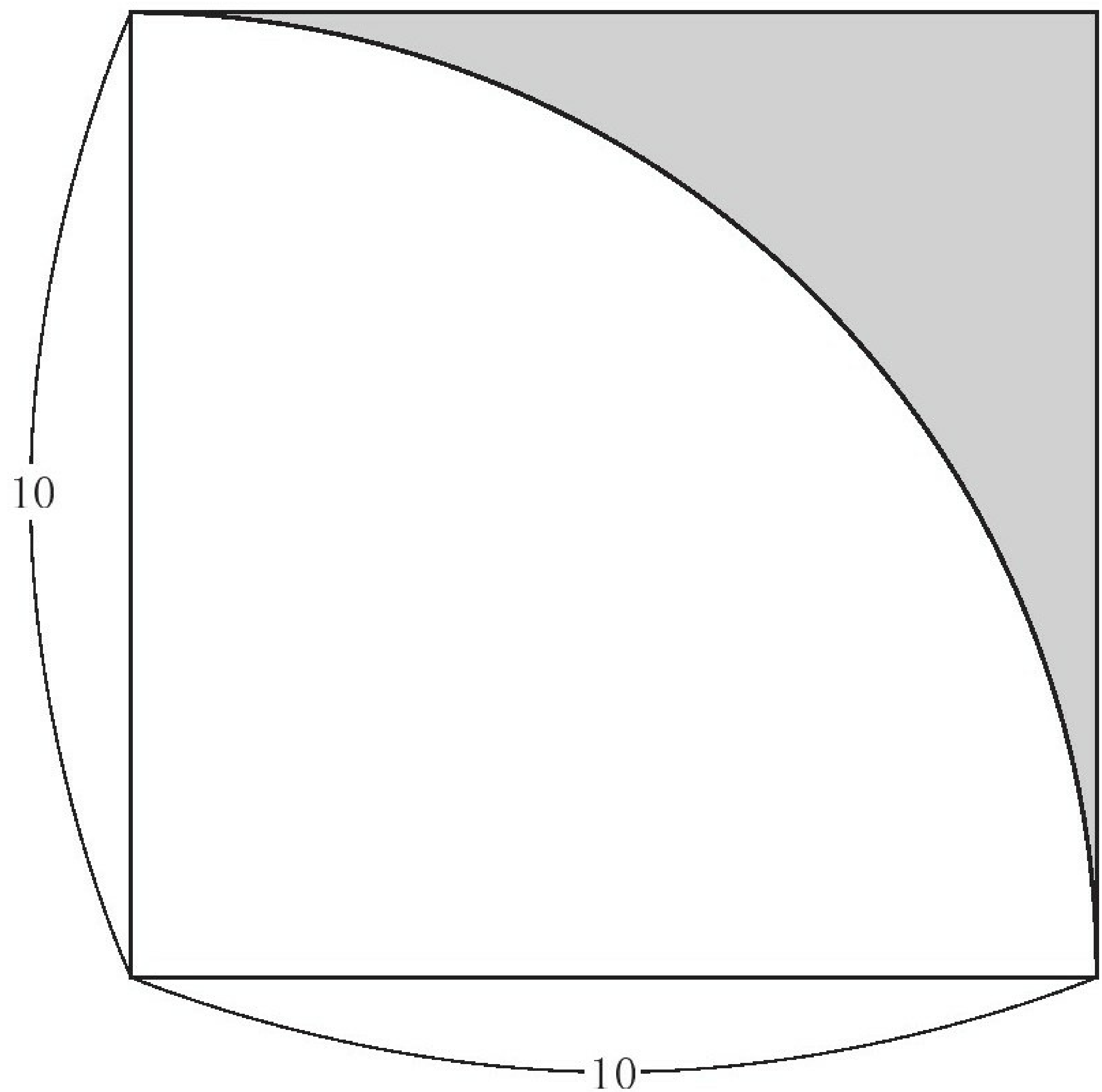
- 迈向多元视角的第一步

- 避开麻烦

对偶和反证法

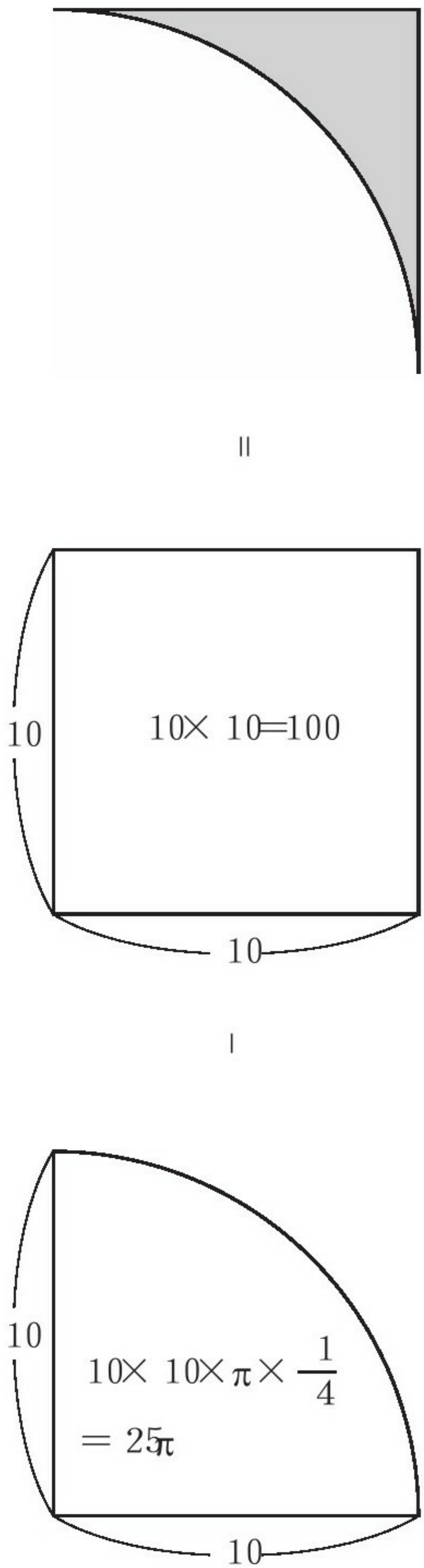
学会从不同的视角观察事物，是我们学习数学的目的之一。不过这并非一朝一夕就能完成的。其实从小学开始，我们就学到了“逆向思维”这种从新视角看事物的方法。

还记得小学时候练习过的下面这种“求灰色部分面积”的题目吧？



还记得当时是怎么计算的吗？因为我们无法直接求得灰色部分的面积，所以是用整个正方形面积减去扇形部分的面积，对吧？

换句话说，



=
10
10×10=100
10
−
10
10×10×π×1/4
= 25π
10

算出来的答案就是100-25π。

像这样无法直接求解的时候，可以从全体扣除欲求解以外的部分，这就是标准的逆向思维。

我认为在数学当中，最容易运用到逆向思维的，就是在求“可能有几种情况或几率”的时候。

假设现在有一道题目是“投掷4枚硬币，请问至少有1枚是正面的几率是多少？”

“至少有1枚是正面”的意思是：

- 有1枚是正面
- 有2枚是正面
- 有3枚是正面
- 有4枚是正面

如果要逐一考虑以上各种情况的几率的话，肯定会很麻烦，不过如果从反方向思考的话，只需考虑全部为反面的情况即可，因此相对较容易计算。

1枚硬币为反面的几率是 $\frac{1}{2}$ ，4枚硬币全部都是反面的几率就是：

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

由于几率的总和为1，因此所求解即为

$$1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

所以当我们碰到“至少……”的问题时，如果直接求解很麻烦的话，就可以运用逆向思维。

各位听过由美国心理学家阿尔伯特·艾利斯（Albert Ellis）所创立的理性情绪行为疗法吗？理性情绪行为疗法又称ABC理论，是广义的认知疗法的先驱。由于ABC理论建议人们可以利用逆向思维来控制情绪，因此我决定在此简单介绍此理论的内容。

能平息怒火的ABC理论

一般来说，人们倾向于认为情绪和诱发情绪的事件之间存在着直接的因果关系。因为搞砸工作而情绪低落时，我们自然而然会认为情绪的低落是由于工作上的失败。换言之，

A（Activating Event：诱发或导致坏情绪的事件）

↑

C（Consequence：结果）

很多人会觉得“事件”就是造成坏情绪的原因。然而，ABC理论在A和C之间插入了：

B（Belief：信仰、信念）

也就是说，在情绪发生之前，人们会依序经历

A→B→C

的过程。所以即使是同样的事件，只要能够改变B，就能够创造出不同的C。

其中B又被分成以下两种类型：

RB（Rational Belief：理性的思考方式）

IB（Irrational Belief：非理性的思考方式）

经由RB所得到的C，将会是“健康”的否定情绪；相对地，经由IB所得到的C，则很容易成为“不健康”的否定情绪。

那么，什么样的信念会被归类为IB（非理性的思考方式）呢？艾利斯提出了以下三种非理性思考方式（IB）的类型：

（ⅰ）认为自己“一定要……才行。”

【例】我考试一定要考高分才行。

（ⅱ）认为别人“一定要……才行。”

【例】他收到我的礼物以后，一定要很高兴才行。

（ⅲ）认为这个世界、社会或人生“一定要……才行。”

【例】电车的运行一定要谨守时刻表才行。

在数学的世界里，要证明“绝对不可能”和“不存在”确实比证明可能或存在还要

困难许多，困难的程度就像站在一片沙滩上证明“这片沙滩上没有钻石存在”一样棘手。

我认为在现实世界当中，像“绝对……”“绝对不……”这样能够完全否认另一种可能性的事物是极其稀少的，这也是为何讲究证据的理性之人从不使用“绝对”这种字眼的原因。

不知变通的思想也是一种IB，这种IB将会导致不健康的否定情绪（愤怒）。然而即使我们的大脑很清楚这件事，常年形成的思考习惯，也有可能让人无法顺利摆脱IB。碰到这种情况，ABC理论就必须前进到下一个阶段：

D（Dispute：反论、辩驳、反驳）

我的亲朋好友常常这样说我：

“你好像都不太会生气呢。”

关于这一点，我个人其实没有太多的感觉。或许我只是在不知不觉中运用了我在数学当中学到的逆向思维，进行了所谓的“反论”吧。举例来说，当我在深夜遇到因施工进行路线管制而导致堵车时，当下我可能会烦躁地心想：

“深夜的路况应该畅通无阻才对啊。”

但下一秒我又会反问自己：

“要是把工程挪到白天进行呢？”

这时我会接着想：

“如果把工程挪到交通流量大的白天进行，肯定会造成更严重的堵塞，令我上班迟到。”

最后得出结论：

“还好工程选在深夜进行。”

小时候，每次对父母说些任性的话，他们就会对我说：“你也要站在别人的立场想一想啊。”没错，站在别人的立场思考，不但能够避免给别人添麻烦，也能够为自己在穷途末路时找到突破点，这是我从数学当中得到的启发。当逆向思维成为一种习惯，我们不再执着于特定的观点，思考方式也会变得更有弹性，从而懂得如何用第三、第四种视角观察事物，让我们距离“拥有多元视角”的数学目标更近一点。

逆、否、对偶命题

虽然说逆向思维很重要，但“若P（则$\Rightarrow$）Q”的“逆向”，似乎存在着多种可能的情况。我们先试着列举看看吧！

①若Q（则$\Rightarrow$）P

②非P（则$\Rightarrow$）非Q

③非Q（则$\Rightarrow$）非P

好，接下来，请问哪个才是原命题“若P（则 $\Rightarrow$ ）Q”的逆命题呢？

在此，我想借世界全垒打王王贞治的锦句一用：

“努力一定能得到回报。如果努力没有得到回报，代表那还称不上是努力。”

真是一句既严厉又帅气的话，出自天资过人又比别人加倍努力的王先生口中，听起来分量就是不一样。我深知改编这种至理名言是多么得失礼而且不自量力，但为了让命题更简单易懂，我决定擅自把后半部分换句话说，也就是：

“如果努力没有回报，就不算是真正的努力。”

根据此命题，我们可以衍生出以下三道命题：

①如果不是真正的努力，就不会得到回报。

②如果努力得到了回报，就算是真正的努力。

③如果是真正的努力，就一定会得到回报。

那么，请问哪一道最有“逆”的感觉呢？有些人可能会觉得把（则 $\Rightarrow$ ）前后互相调换的①最有“逆”的感觉；有些人可能觉得各自从否定改成肯定的②比较有“逆”的感觉；对于③的话，可能有人会心想：“是非也逆，前后也逆？”虽然感觉因人而异，但这三种情况在数学上都有特定的名称，即①逆命题；②否命题；③对偶命题。

相信有很多人会觉得不理解，“为什么②不是逆命题呢？”不过在这里还请各位先

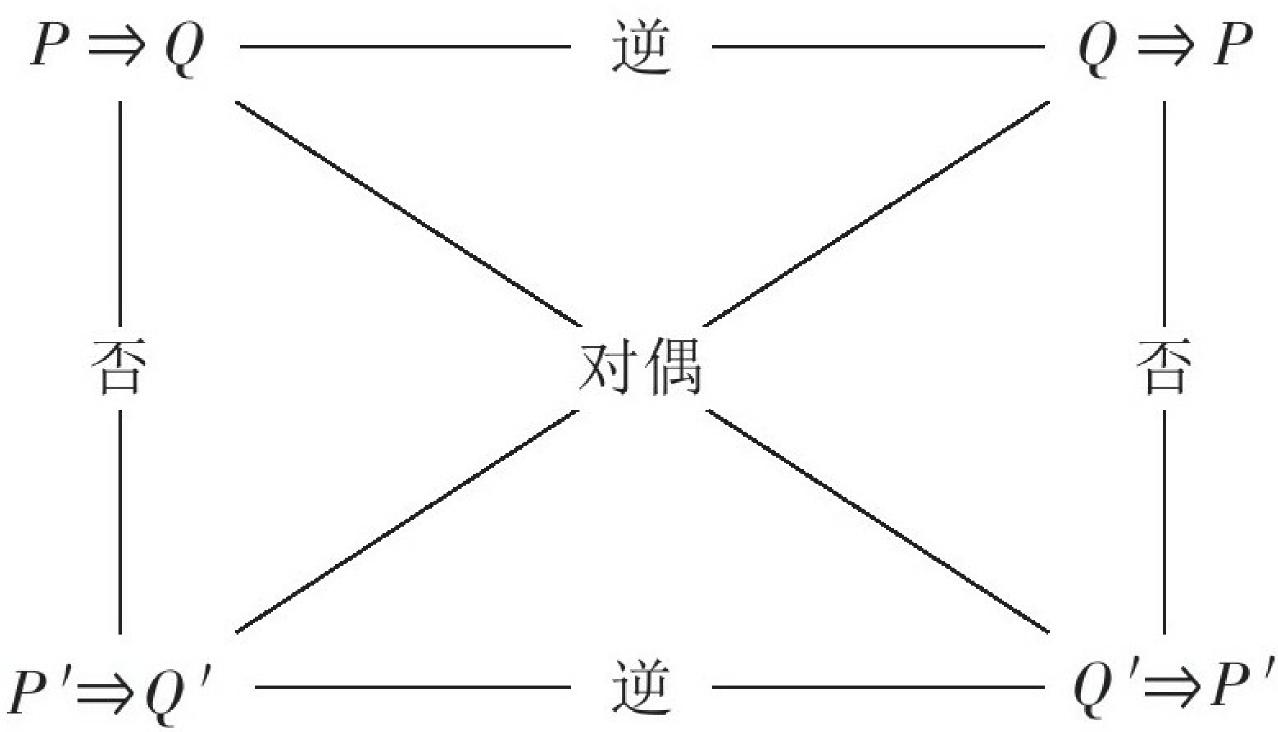
忍耐一下（笑）。数学是一门在用字遣词上，定义相当严谨的学问。要以数学逻辑讨论一件事时，最先讲究的就是定义。所以下面我将先为各位总结有关命题的（数学）定义：

逆：$\Rightarrow$（则）的前后互相对调。

否：$\Rightarrow$（则）的前后不变，但分别改成否定。

对偶：$\Rightarrow$（则）的前后互相对调，且分别改成否定。

若以图形来表示，就会像这样：



“（若）P $\Rightarrow$ （则）Q”是原命题。P'和Q'念作“Pprime”和“Qprime”，各自代表否定的意思。以刚才的例子来说，就是：

P：没有回报的努力

P'：有回报的努力

Q：不是真正的努力

Q'：真正的努力

好了，对我们来说，最重要的逆向思维究竟是哪个呢？就“若P则Q”的命题来说，“若Q则P”是定义上的逆命题，但我们在判断时，真正重要的其实是该命题是否与原命题互为充要条件（参阅70页），在此，我想与各位进一步讨论的是对偶命题。

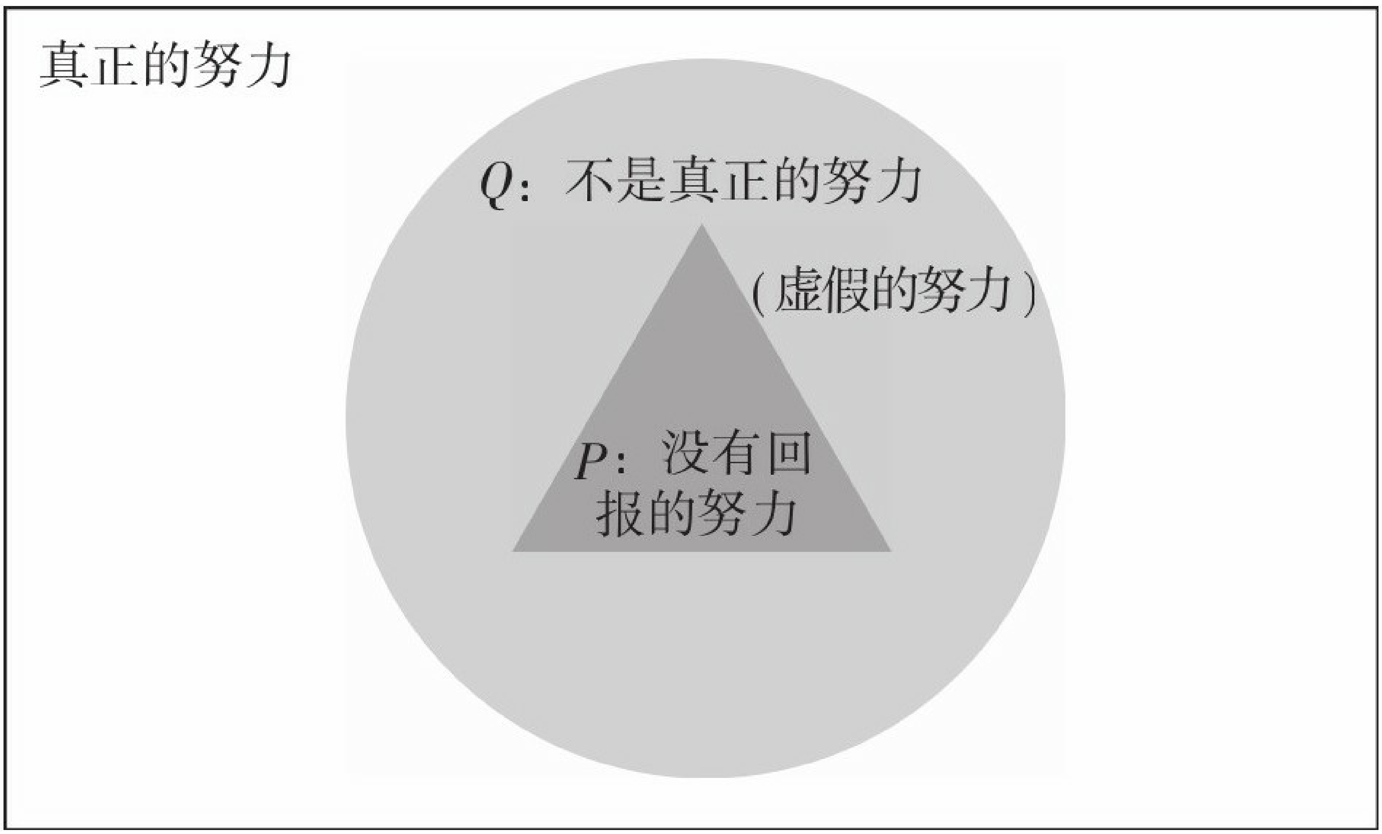
即使大家对逆命题和否命题都没有疑问，但应该也有人没听过“对偶”命题。对偶其实是一种非常有用的逆向思维，因为原命题和对偶命题的真伪是完全一致的。

以前面的例子来说，“如果努力没有回报，就不算是真正的努力”和其对偶“如果是真正的努力，就一定会得到回报”，两句话表达的其实是同一件事。若以语言的含蓄程度来看，前者或许略胜后者，但若单就是否容易理解的角度来看，应该是后者更容易理解吧？这就是对偶的有趣之处。我再多做点儿解说好了。

在前面“顺序概念”的单元中，我提到“小大”为真命题（参阅第66页）。现在我们就根据此逻辑来思考一下吧。

首先，如果原命题“若P则（$\Rightarrow$）Q”（如果努力没有回报，就不算是真正的努力）为真，则P（没有回报的努力）为“小”，Q（不是真正的努力=虚假的努力）为“大”。

画成图像就像这样：

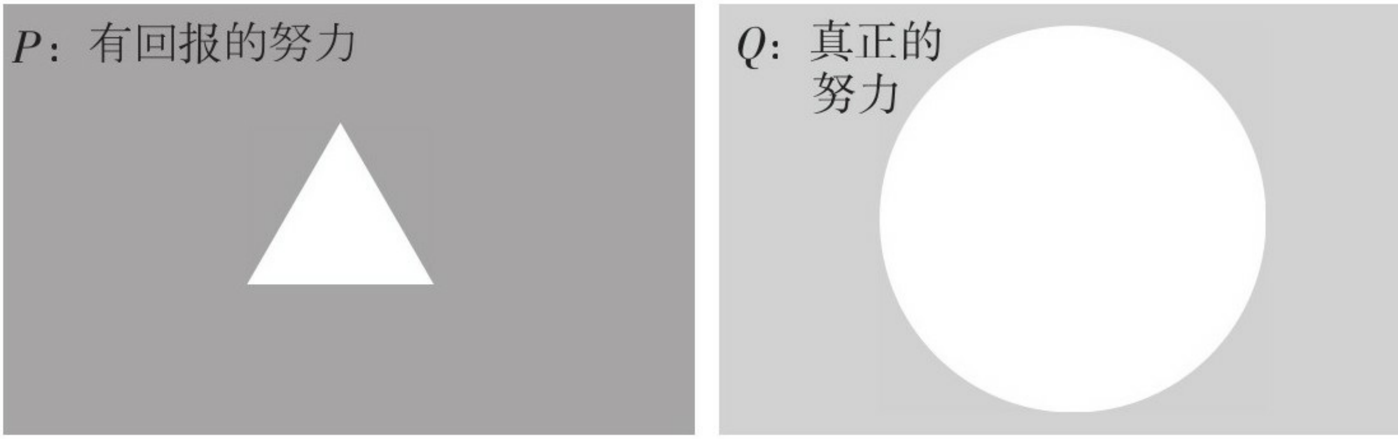


P（小）：没有回报的努力

Q（大）：不是真正的努力（虚假的努力）

接下来，我们来看看此命题的对偶“若Q'则（$\Rightarrow$）P'”（如果是真正的努力，就一定会得到回报）吧，当P比Q小时，P'就会比Q'大（意思等同于“神奈川县的面积比整个关东地区小，但以全日本来说，神奈川县以外的面积，比关东地区以

外的面积还大”）。画成图像的话，如下图所示：



P'：有回报的努力（大）　　Q'：真正的努力（小）

换句话说，“P（小）＜Q（大）”与“Q'（小）＜P'（大）”等价，因此当“若P（则 ⇒ ）Q”为真时，“若Q' ⇒ （则）P'”肯定为真。

综上所述，当原命题的真伪难以判断时，通过其对偶来思考，是一种非常有用的逆向思维。

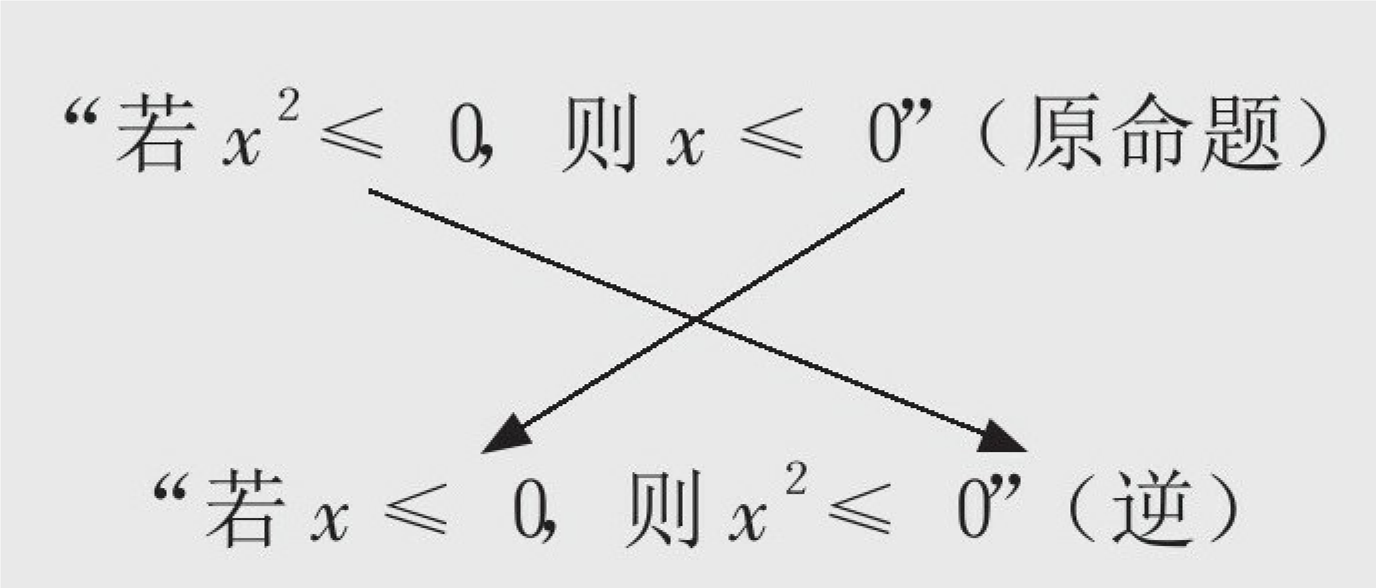
在数学当中，我们可以向下面这样运用对偶的原理：

问题：请检验以下命题的真伪：

“若x2≤0，则x≤0”

解答：

嗯，这题看起来好像对又好像不对，感觉挺微妙的，这时候就需要用对偶原理来解题。在写对偶命题时，只要把“则”的前后互相调换，然后分别把内容意思改成否定即可，因此：



↓（分别改成否定）

“若x＞0，则x2＞0”（对偶）

怎么样？相较于难以判定真伪的原命题，我想对偶命题应该明显容易验证许多吧？“若x＞0，则x2＞0”的真伪，可以说一目了然，明显是一道真命题。因此原命题“若x2≤0，则x≤0”亦为真。

反证法

曾经有个朋友跟我说：

“我的数学真的不好，可是毕业时数学老师说的一段话，我到现在都还记得一清二楚。”

接着他说了他的高中数学老师在最后一堂课上对学生说的话：

“听好了，各位同学。你们知道最难用数学证明的是什么吗？最难用数学证明的，就是证明一件事情不可能发生。一般来说，要证明一件事情有可能发生，比证明一

件事情不可能发生要来得简单得多。虽然今天是最后一堂数学课，但我希望你们都不要忘记，对各位来说，要证明未来你们立志要完成的事不可能发生，也同样是一件非常困难的事。”

真是一位了不起的老师，我完全认同他说的话。

我在前文当中也提到，要证明“不可能”或“不存在”是一件非常困难的事。过去一次也没成功过的事情，未来不见得永远不会成功；以前从来没发现过的东西，不代表将来一定找不到。而在数学的世界里，最能够有效证明“不可能”或“不存在”的方法就是反证法。顺带一提，耗费数百年才完成证明的著名费马大定理，是一套证明“3以上的自然数n，可以满足xn+yn=zn的自然数（x,y，z）解不存在”的定理，而成功证明此定理的安德鲁·怀尔斯（Andrew Wiles），他所使用的方法基本上（当然也需要一定的运气和程度）就是反证法。

所谓的反证法，就是先假设欲证明的某命题成立，再导出矛盾结果证明原命题不成立的证明法。反证法的证明步骤如下：

①假设欲证明的某命题成立。

②导出矛盾结果。

虽然反证法听起来好像很困难，但实际上并不难。在刑警电视剧当中，警察把有不在场证明的人从嫌疑犯名单中剔除，使用的其实就是反证法。

假设现在有一桩没有目击者的案件，警方从现场证据分析A有可能是嫌犯，于是把他押回审讯。这名嫌犯A辩称自己无罪，但由于现场没有目击者，所以他很难直接证明自己不是犯人。不过在事件发生当天的同一时刻，A正在距离现场很远的地方跟朋友

B喝酒。

因此有明确的不在场证明。此时，A肯定会这样对刑警说：

“听好了！假如我是犯人，事件发生当天的那个时间，我人正在距离现场开车也要一个小时才能赶到的地方跟朋友B喝酒。如果我真的是犯人，怎么可能做得到？所以我是清白的！”

接下来，警方只要向B确认无误后，A就会立刻获得释放。因为这本来就理所当然，所以我想很多人都没意识到其中运用的就是反证法，不过若要嫌犯直接证明“我不是犯人”，难度实在太高，所以才会使用“假如我是犯人，这件事就与我的不在场证明互相矛盾”的逻辑来证明自己的清白，这是很标准的反证法。

若再举其他反证法的例子，还有一则很有名的故事，就是“阿基米德与王冠”。

阿基米德与王冠

古希腊时期，曾有位国王命令手下的工匠：“帮我打造一顶纯金的王冠！”并把制作王冠需要的金块交给工匠。过了一段时间以后，工匠顺利地打造出一顶漂亮的王冠，国王看了非常高兴。然而没多久，街头巷尾竟然开始谣传：

“工匠为了把国王给他的部分金块占为己有，在金块里面混入了其他金属。”

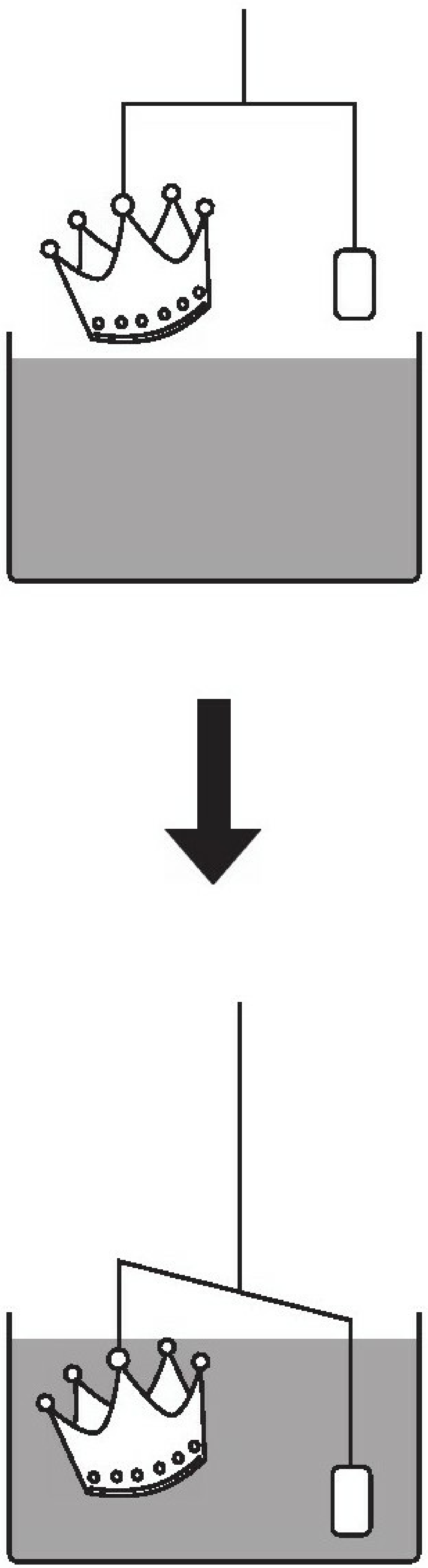
由于王冠做得实在太光彩夺人了，所以光用眼睛其实看不出里面是否掺杂了其他物质。于是国王便召来当时最顶尖的学者阿基米德，并命令他：

“我要你给我检验一下这个王冠是不是纯金的。”

“遵命。”阿基米德虽然老实地接受了国王的命令，但他对于究竟该怎么调查根本

毫无头绪。直到有一天，当阿基米德正在浴缸里泡澡时，他发现水的浮力会让自己的身体变轻（阿基米德原理），于是他便想到可以用下面的方式解决国王的问题。

首先，准备一个水槽和一个跟王冠一样重的金块。假如王冠是纯金打造的话，王冠的体积会等于金块的体积。由于物体承受的浮力与物体的体积成正比，因此王冠和金块应该会承受相同的浮力。换言之，即使把两者放入水槽中，重量应该也会一模一样。然而，实际操作后，却出现这样的结果：



原本在水槽外等重的金块和王冠，放进水槽以后却出现差异，因为王冠承受的浮力比金块还大。这一点与王冠是纯金打造的前提（王冠与金块的体积相同）相互矛盾。通过上面的过程，阿基米德利用反证法证明了王冠当中掺杂着其他物质，并向国王提出报告。据说那位利欲熏心的工匠，最后被国王处以死刑。

反证法的陷阱

不知道各位是否曾在电影或电视剧当中，看过类似下面的情节？

女性：“前段时间他跟我表白了。”

朋友：“那你对他有感觉吗？”

女性：“嗯……不是很讨厌……”

朋友：“那你就跟他交往好啦！”

女性：“哪有这么简单的事啊！”

这位朋友原本应该是假设这位女性讨厌对方，所以当她听到一个矛盾（不讨厌）的答案时，自行做出了“女性喜欢他”的结论，所以才会说出“那你就跟他交往好啦”。

朋友使用的是反证法没错，但人的感情并不能用二元论“喜欢”或“讨厌”来定义。除了“喜欢”和“讨厌”之外，还有“不喜欢也不讨厌”，甚至有一种说法是“因为喜欢所以才会讨厌”。人的情感非常复杂。如果想要对这种无法以二元论定义的事情使用反证法的话，所有原命题以外的选择都必须经过“假设→矛盾”来证明。当我们假设某数为偶数，并推理出矛盾的结果，那么根据反证法，我们可以

得到该数为奇数的结论；但当我们想要证明某数可以被3整除时，若只假设该数除以3后余数为1，接着导出矛盾的结果是不够的，还需要另外假设该数除以3后余数为2，并也导出矛盾的结果才行。

有一种概念叫作“二律背反”，意思是“互相矛盾的两个命题同时成立”。比如说，有时候新闻会评论那些因整个社会价值观扭曲而发生的事件的加害者，说：

“身为加害者的他，或许同时也是一名受害者……”

在这种情况下，“他是加害者也是受害者”的事实，前后互相矛盾，却又同时成立。此外，前文提到的“因为喜欢所以才会讨厌”，这种说法在广义上来说也是二律背反（虽然严格来说不能适用于会受情感影响的事情上）。

江户幕府以杀生为前提将鹰狩（狩猎老鹰）制度化，却又同时颁布《生类怜悯令》，也是一个二律背反的例子。当二律背反成立时，反证法就毫无用武之地。

假设“江户幕府把生命视为最重要的东西”，则此命题就与当时制定鹰狩制度的行为相互矛盾。但如果我们因此断言：“江户幕府并不重视生命”，又跟《生类怜悯令》相互矛盾。

由于反证法是相当好用的论证方法，因此当用惯以后，很容易自然而然地把它运用在所有地方，但各位千万不要忘记其中还存在着这样的陷阱。明明还有其他的可能性，却以二元论加以论断，并通过反证法朝错误的方向推理，类似的情况多不胜数。而要避免这样的情形，本章节提及的逆向思维，也就是尝试思考“别种可能性”的观点非常重要。只要平时尽可能养成习惯，面对命题时思考是否还有别种可能性，就能够看穿反证法的误用陷阱。

另外，在二律背反成立的前提下使用反证法，本身就是一件相当荒谬的事。二律背反一词广为人知，是由德意志观念论哲学始祖伊曼努尔·康德（Immanuel Kant）提出，意指两种理论各自成立却又互相矛盾的现象。虽然二律背反的情况无法套用反证法，但也不能因此掉以轻心，将二律背反视为单纯的矛盾现象。希望各位在培养逆向思维的能力之余，也能塑造出辨识二律背反的能力。

第⑦方面 对数学的美感

- 讲求合理性

- 利用对称性

- 追求一致性

在教授数学之余，我也是一名专业的指挥家。经常有人问我：

“要同时兼顾数学补习班和指挥家的事业，应该很不容易吧？”

其实对我来说，我从来不觉得这是全然不同的两件事，因为指挥家阅读乐队总谱（将乐团各声部的音集中记录的乐谱）的过程，其实和解读数学的逻辑非常相似。

我为了学习指挥而前往欧洲留学时，经常听到人家说：

“不错，他（她）的逻辑思维很强。”

在日本，我总觉得人们倾向于吹捧那些很有天分或才气的人，却对那些强调理论的人敬而远之。不过在欧洲地区（美国可能也是这样），逻辑的却会使一个人得到尊敬和赞赏。

古典音乐就是在这样的欧洲土壤上滋生成长的。在解读莫扎特、贝多芬、朱塞佩·威尔第（Giuseppe Verdi）、普契尼（Giacomo Puccini）或古斯塔夫·马勒（Gustav Mahler）等天才遗留给后世的无数名曲乐谱时，其中的“逻辑”总让我感动不已。然而音乐上的“逻辑”，指的究竟是什么呢？答案当然就是“和声”了。

指挥家的练习

有的时候，人们会问我：

“指挥家都是怎么练习指挥的呢？”

说起来，乐手们练习乐器，确实比较容易在脑海中产生画面，但指挥家练习指挥的方式，似乎不是那么容易想象。

虽说这个世界上有形形色色的指挥家，不能一概而论，但至少我自己在练习的时候，几乎不太练习手臂的动作。当然，在那些难以与独奏配合、节奏或速度改变的地方，我会去思考手臂应该如何动作，但真正的练习（或者说是学习）其实有90%以上都是在阅读总谱。

那么，所谓的阅读总谱，究竟在读些什么呢？其实最主要就是和声（harmony）的进行。当然，一开始一定会先确认哪些段落会使用到哪些乐器，但花最多心思的部分还是在和声的阅读上，因为和声的进行将会决定音乐呈现出来的感觉。

古典音乐的特征

要用一句话说明古典音乐和其他音乐的区别，是很困难的一件事，不过如果硬要说

的话，我认为速度不固定的是古典音乐，速度固定的则是古典音乐以外的音乐。

古典音乐以外的音乐大多会加入鼓等节奏乐器。由于该节奏乐器基本上会遵循一定的速度，所以整体音乐的速度自然也会固定不变，甚至有可能利用机械来演奏节奏乐器（即俗称的“数字音乐”）。当然，古典音乐以外的音乐的速度也有可能在途中减慢或加快，但那只是少部分的音乐，而且速度改变后又会立刻稳定下来，按照一定的速度进行演奏。

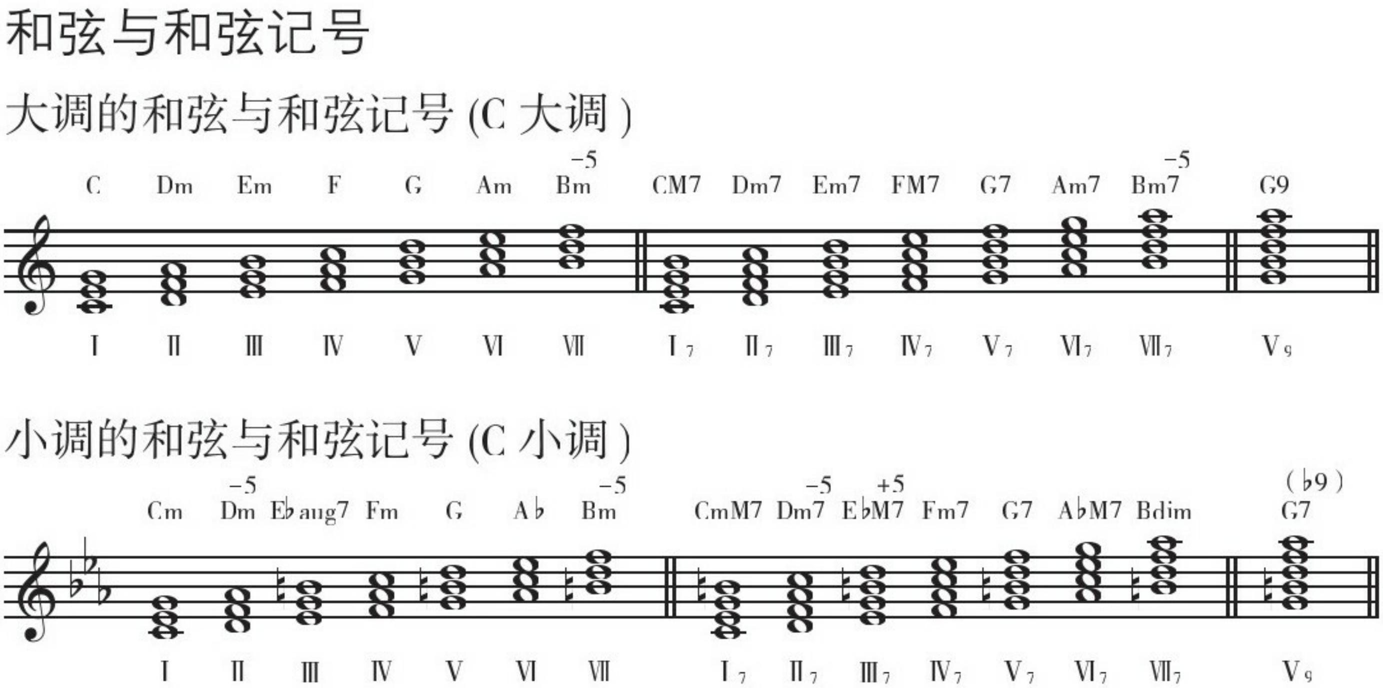
相对的，古典音乐通常以小节或拍为单位，演奏的速度变化无常。如果刻意让古典乐曲配合节拍器，完全按照固定的节拍演奏，那么古典音乐将变得无聊而不耐听，失去曲子本身的魅力。

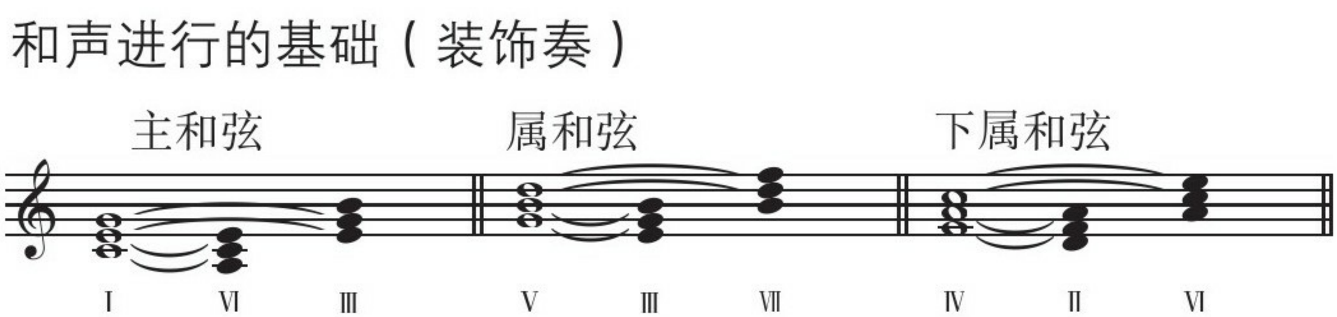
职业的管弦乐团即使没有指挥家，也能够合奏出大部分的乐曲，因此很少会为求整齐划一而需要一名指挥家。只是在“如何营造音乐”上，每个乐手都会有各自的想法和程度上的差异，因此如果在没有指挥的情况下演奏，乐手们就必须互相揣测对方的心态，结果虽然各自使出了浑身解数，整场演奏却平淡无味。

指挥家最重要的任务就是指挥众人如何完成一段音乐。当指挥家告诉众人：“往这里走。”这样明确地指出音乐的行进方向，整个乐团才能够放下心来尽情发挥。当然，思考如何呈现音色或其他无法用言语表达的音乐内涵也是指挥家的责任，但总地说来，指挥家最重要的任务其实是决定如何呈现千变万化的速度。只是，虽然决定权在指挥家手中，但既然是古典音乐的演奏，当然不可能随性发挥。指挥家必须想象（研究）作曲家脑海中所描绘的速度变换方式，以及在该乐曲创作的年代和情境下，速度应该以什么样的方式进行变换，然后尽可能忠实地还原乐曲原貌，而其中最重要的就是和声的进行。

和弦与和弦记号

接下来的内容或许有点儿专业，但为了让各位理解后面的内容，我必须先介绍和弦以及和弦记号的概念。下面的乐谱是C大调及C小调的和弦与和弦记号。





根据和弦各自的功能（角色）进行分类。其中最重要的三种和弦就是上面列举的主和弦（T）、属和弦（D）和下属和弦（S）。

主和弦（T）

在该调中扮演主角的和弦。演奏此和弦会给人一种解放解决或放松的感觉。这种感

觉就好像回到自己的家一样，所以一首乐曲的最后，通常都会以主和弦作结尾。除了Ⅰ（以C大调来说就是do、mi、so）之外，也可以用Ⅵ或Ⅲ的和弦来取代。

属和弦（D）

与主和弦相反，属和弦会给人一种紧张的感觉。这种感觉就好像快要到达目的地一样，会让人特别想要前进到主和弦（回到自己的家）。除了Ⅴ（以C大调来说就是so、si、re）之外，Ⅲ或Ⅶ的和弦也具备属和弦的功能。

下属和弦（S）

虽然没有属和弦这么强烈，但跟属和弦比起来，同样给人紧张的感觉。这种和弦容易给人发展、开放的感觉，可以前进到属和弦（继续远行），也可以用主和弦收尾（回到自己的家）。除了Ⅳ（以C大调来说就是fa、ra、do）之外，Ⅱ或Ⅳ的和弦也具备下属和弦的功能。

我在阅读总谱时，会先着眼于一种叫作装饰奏的和声进行。所谓的装饰奏，指的是以下三种和声进行的任何一种：

T→D→T

T→S→D→T

T→S→T

各位最熟悉的和弦进行应该是T→S→D→T吧，因为“起立（T）→立正（S）→敬礼（D）→坐下（T）”，是最经典的一种和弦进行形式。

好了，接下来要进入重头戏了。

一段音乐如果在进入D（敬礼）的和弦之前减缓速度，会给人一种极度不自然的感觉。因为“立正”的时间一旦拖延过久，任谁都会想要快点儿进入“敬礼”的阶段（会弹奏乐器的人，请务必亲自一试）。

但不可思议的是，等到进入D（敬礼）的和弦以后，即使段落稍微延长一点儿，也不会给人不自然的感觉。虽然有些人可能会出现腰痛等身体不适的症状（笑），但在音乐的世界里，即使D（敬礼）的长度是S（立正）的2倍，也几乎不会让人产生不协调的感觉。不过，当D（敬礼）的长度比S（立正）还短的时候，反而会让人有种奇妙的感受，好像有点儿浪费或是把老师当成笨蛋的感觉。

不过，虽然说D（敬礼）的时间可以拉长，但在D（敬礼）的和弦进行期间，心情上会持续处于紧张的状态，而这就是最精彩的部分。接下来，承接在紧张之后的T（坐下）会让人不自觉松一口气，因为“啊，回到家了”的安心感和喜悦感，能够同时让紧张的情绪获得舒缓。

所以，想要创作出令人心情愉快的音乐，必须在进入D的和弦之前作音乐的铺陈，然后在进入D的和弦之后、抵达T之前，尽量争取时间，以这种方式完成（演奏）一段装饰奏。说得极端一点儿，我觉得所谓的音乐演奏，就是在装饰奏中营造出从紧张到缓和的自然流动。

以上的内容我已经尽可能地简单化了。实际上，即便是古典派的乐曲，也有不少无法轻易找到D的情况，因为作曲家会以各种形式在乐曲中创作D。例如用V以外的和弦代替、省略增四度（以C大调来说就是fa到si之间的音程）、用转调或节奏取代和弦进行D的创作等，不拘泥于特定形式是很常见的事。

我认为指挥家学习的最大目的，就是从总谱中找出各式各样的D，并营造出最符合作

曲家创作初衷的装饰奏。

假如你曾经听到一首曲子中的某一段觉得特别感动，我敢说其中一定有装饰奏的存在。越是有名的曲子，组织出装饰奏的和声进行就越高明，只要分析乐谱即可知道。这些经过极度精密计算的逻辑，是建立在薪火相传的传统和天才作曲家一手打造的创新之上的，我们内心的感动绝非偶然，其中确实存在着打动人心的理由。

数学和音乐的共同点

当然，光靠逻辑并不能创造出打动人心的音乐。在讲究逻辑之前，自然还需要有作曲家和演奏家用一颗热诚的心，向众人传达想传达的感觉。

在这一方面，音乐和数学有异曲同工之妙。数学是自然界的语言，每一个数学式当中，肯定都包含着某些讯息。无法用一颗感性的心倾听其中讯息的数学家或物理学家，绝对不可能成为一流的研究者。

我认为数学和音乐存在着两项共同点，一是两者皆为美丽的逻辑，二是接触这两种学问的人都必须具备丰沛的感性。

事实上，在著名的数学家当中，有很多热爱音乐的人。

广中平佑是日本最具代表性的数学家之一，听说他在高中的时候曾经梦想成为一名音乐家（广中先生在与私交甚笃的小泽征尔交谈时提到）。当时朋友们全都认为，擅长钢琴又能够作曲的他，应该会报考音乐大学，没想到他却在高中二年级时，突然发现数学的魅力，开始潜心投入数学的世界中，最后走上数学而非音乐之路。

广中先生曾说：

“数学和音乐一样美。”

除此之外，爱因斯坦热爱音乐一事同样广为人知。他曾经在接受采访时，被问到这么一个问题：

“对你来说，死亡是什么？”

当时他的回答是：

“死亡就是再也无法聆听莫扎特。”

在我身边，也有很多学理科的朋友喜欢音乐，更值得一提的是，很多医生都很擅长弹奏乐器。现在甚至还有一支由医生（或未来的医生）组成的业余管弦乐团（全日本医家管弦乐团）。

相反地，喜欢数学的音乐家似乎并不多见，但这是因为职业音乐家通常都从小开始学习音乐，因此在被训练占去多数时间的前提下，他们应该很少有机会接触到数学。事实上，在我周围的职业音乐家中，（尽管本人可能没有注意到）也有不少人在言谈举止之间，不经意流露出数学的资质。他们总是能够在丰富的感性与细腻的理论间，达成绝佳的平衡，让我们听见最动人的演奏。其中就有两位音乐家，分别在数学和医学的领域登峰造极。

一位是指挥家朱塞佩·西诺波利（Giuseppe Sinopoli）。他是历任爱乐管弦乐团首席指挥、德累斯顿国立管弦乐团音乐总监的名指挥家，在日本也有众多乐迷。学生时期的他，不仅在马切鲁诺音乐学院专攻作曲，同时还持有帕多瓦大学精神医学的博士学位。

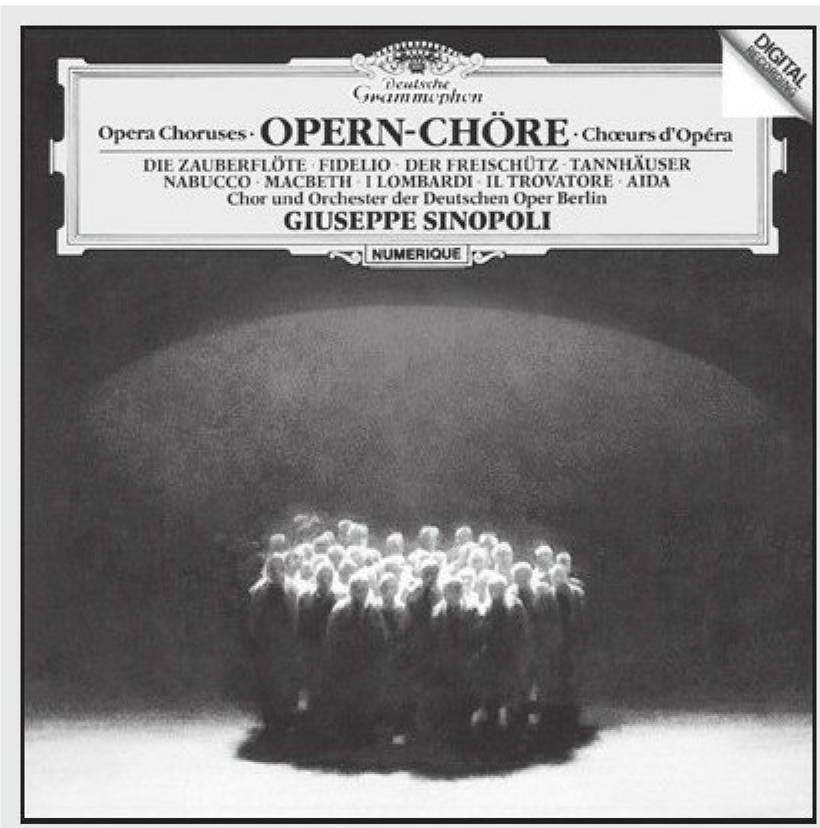
另外，同样作为指挥家的埃内斯特·安塞梅（Ernest Ansermet），不但曾带领瑞士

罗曼德管弦乐团等留下无数著名的录音作品，同时也曾在索邦大学数学系求学，后来更成为洛桑大学的数学系教授。

休息一下，来听听我的最爱专辑吧！

歌剧合唱精选

（西诺波利指挥；柏林德意志歌剧院管弦乐团&合唱团）

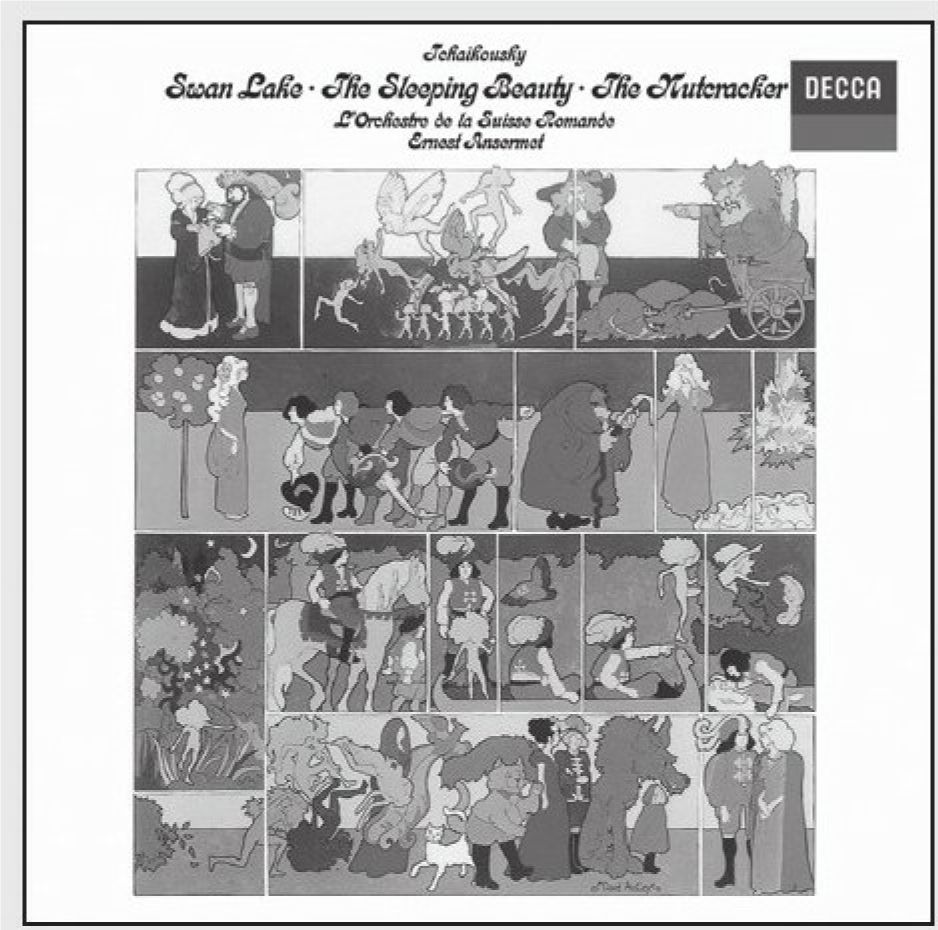


西诺波利根据自己对乐谱的敏锐洞察力，结合精神医学的观点，尤其在后期浪漫派的管弦乐曲或歌剧的演奏中，以其独特的诠释方式大放异彩。这张集合了歌剧合唱经典名曲的专辑，变幻自如地呈现出人类微妙的情感，当中包含着许多撼动听者心灵的瞬间。

朱塞佩·西诺波利（1946-2001）

柴可夫斯基：

三大芭蕾舞选曲（安塞梅指挥；瑞士罗曼德管弦乐团）



由安塞梅率领瑞士罗曼德管弦乐团所录制的俄罗斯音乐和法国音乐，长期以来各自盘踞该名曲之经典的宝座，即使是在今天，依然屹立不倒。尤其柴可夫斯基的三大芭蕾舞曲，更是让有“芭蕾之神”之称的安塞梅发挥得淋漓尽致。以冷静的分析为基调的演奏并不会过度浪漫，却又能无时无刻让人感到热血沸腾。

埃内斯特·安塞梅（1883-1969）

讲求合理性

糟糕，一不小心就谈了好多音乐的事，每次提到自己喜欢的东西，很容易就浑然忘我……好了，闲话到此为止。

我想应该不用我多说大家就已经很清楚了，其实数学式思维就是逻辑式思维。现在，人们会重新把目光聚焦在数学式思维，或许就是因为在这个价值观越来越多样化的现代社会，人们越来越重视用自己的头脑思考的重要性了吧。数学式思维确实能够有效解决各种问题，但光是基于有效这个理由，并不足以支持我们持续追求逻辑。我认为最重要的是要培养一颗能够体察逻辑之美的心。如果只是被迫接受维持逻辑思维的观念，那么当我们面临越重要的关头时，就越容易流于情绪性而非逻辑性的思维模式。

其实不仅是音乐，举凡文学、电影、绘画或雕刻等，所有艺术背后的逻辑都与数学

息息相关。即便是看起来与逻辑八竿子打不着的搞笑艺人，能够在舞台上脱颖而出，其讲话艺术自然也不在话下。他们靠着在对话过程中埋下的伏笔、与音乐的装饰奏有异曲同工之妙的紧张与缓和以及机关算尽后来的一记回马枪，都能让人捧腹大笑。专业搞笑艺人的世界，可没简单到光靠煽动鼓噪就能使人发笑，这一点我想作为观众的我们也都心知肚明。

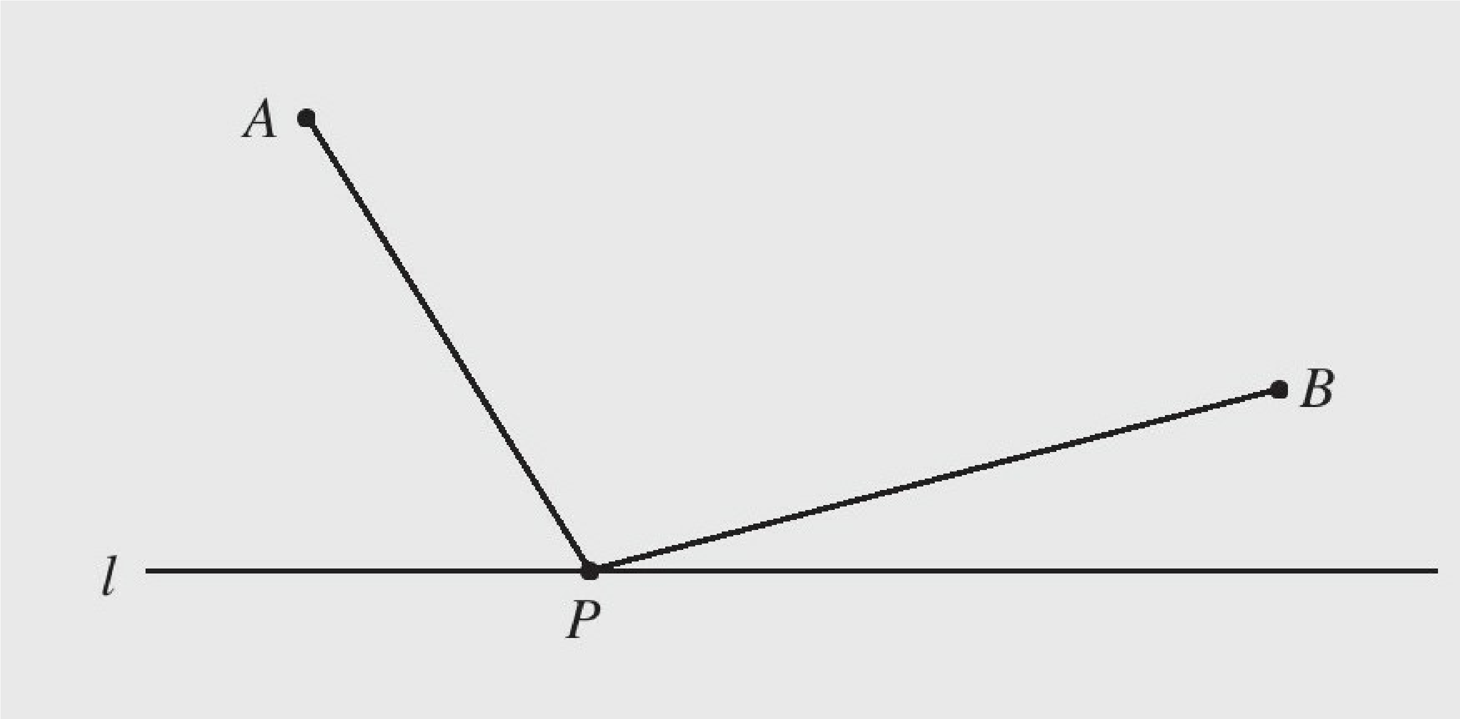
一颗能够感受合理之美的心，会认为不合理的事物毫无美感、破坏心情，而培养这样的一颗心，就是数学思维的基本。

利用对称性

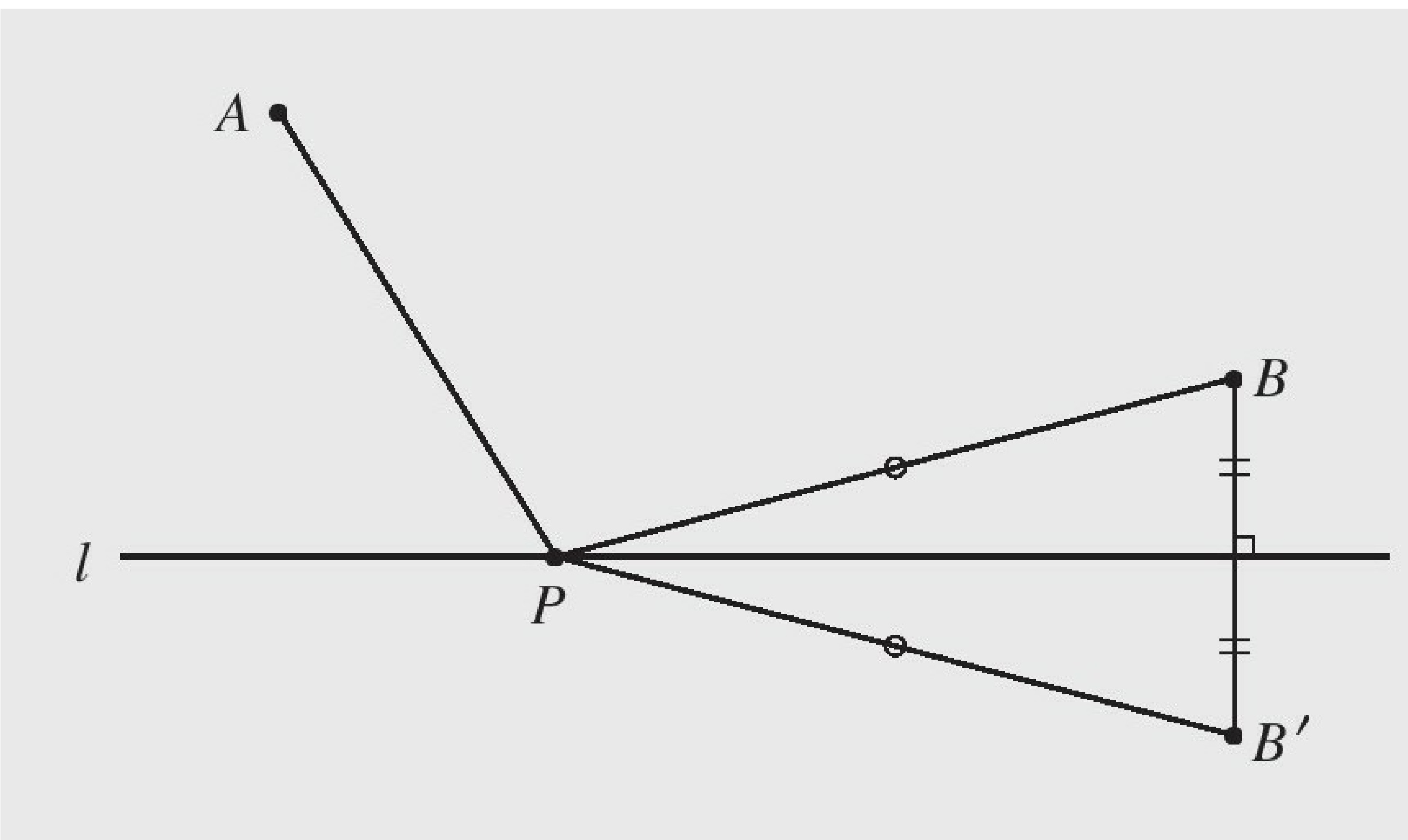
自古希腊时代以来，左右对称一直被人们视为判断人类美丑的重要因素。只要看到对称的东西，几乎所有人都会无条件地认为那是美丽的。事实上，2008年布鲁内尔大学（英国）团队所发表的研究表明，人类在寻找恋人时，似乎会从对方身体的左右对称性去评价体态的美感。在此研究之前，人们也已经发现脸部五官越对称，看起来越有美感。无论如何，有关对称性是构成美感的基础，应该很少有人会反对吧？妈妈在帮小朋友剪头发的时候，会一边嚷嚷着：“哎呀，右边好像剪太短了！”然后把左边的头发剪得跟右边一样短，因为这位妈妈意识到左右对称的重要性（笑）。

在数学中，讲究对称性是一件非常有意义的事。因为如果能够找出对称性并加以活用，很多问题即可迎刃而解。下面将介绍几个活用对称性的范例：

（1）利用图



如果要在上图1中，找出使AP+PB距离最短的点P，只要利用1找出点B的对称点B'，即可顺利解决此问题。

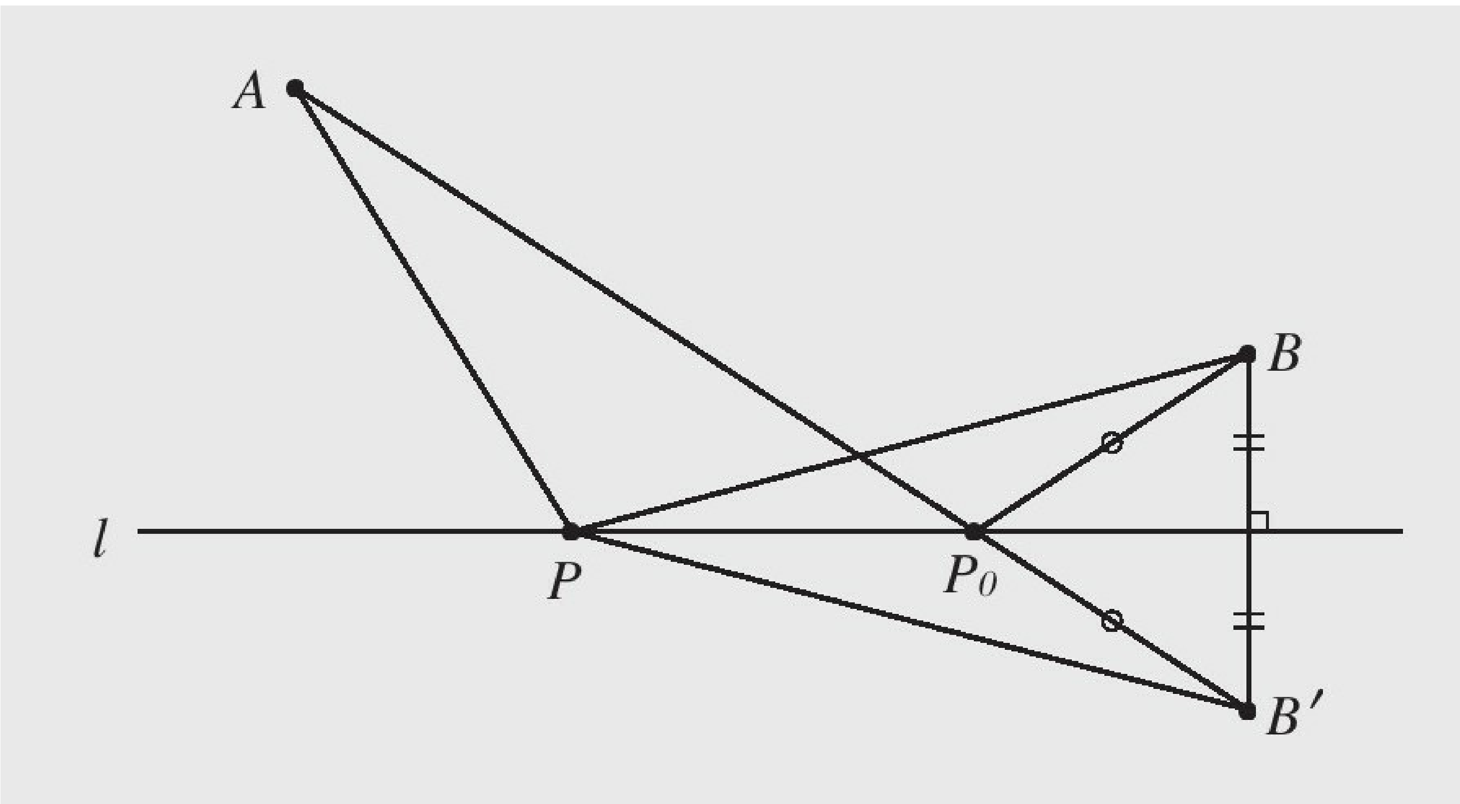


如此一来，△PBB'即为等腰三角形，故PB=PB'。换句话说，

AP+PB=AP+PB'

没错吧？

由于两点之间，直线最短，因此当P位于下图直线AB'上的点P0时，AP+PB'的长度就是最短距离。



（2）利用式子的对称

x+y、xy、x2+y2、x3+y3、$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$

即使任意替换文字也不改变意义的多项式，就称为对称式。由于对称式一定可以用基本对称式（x+y和xy）来表示，因此当我们注意到题目中的式子是对称式时，即可

参考以下的方式，把原本的题目变形为基本对称式，再利用基本对称式求解即可。

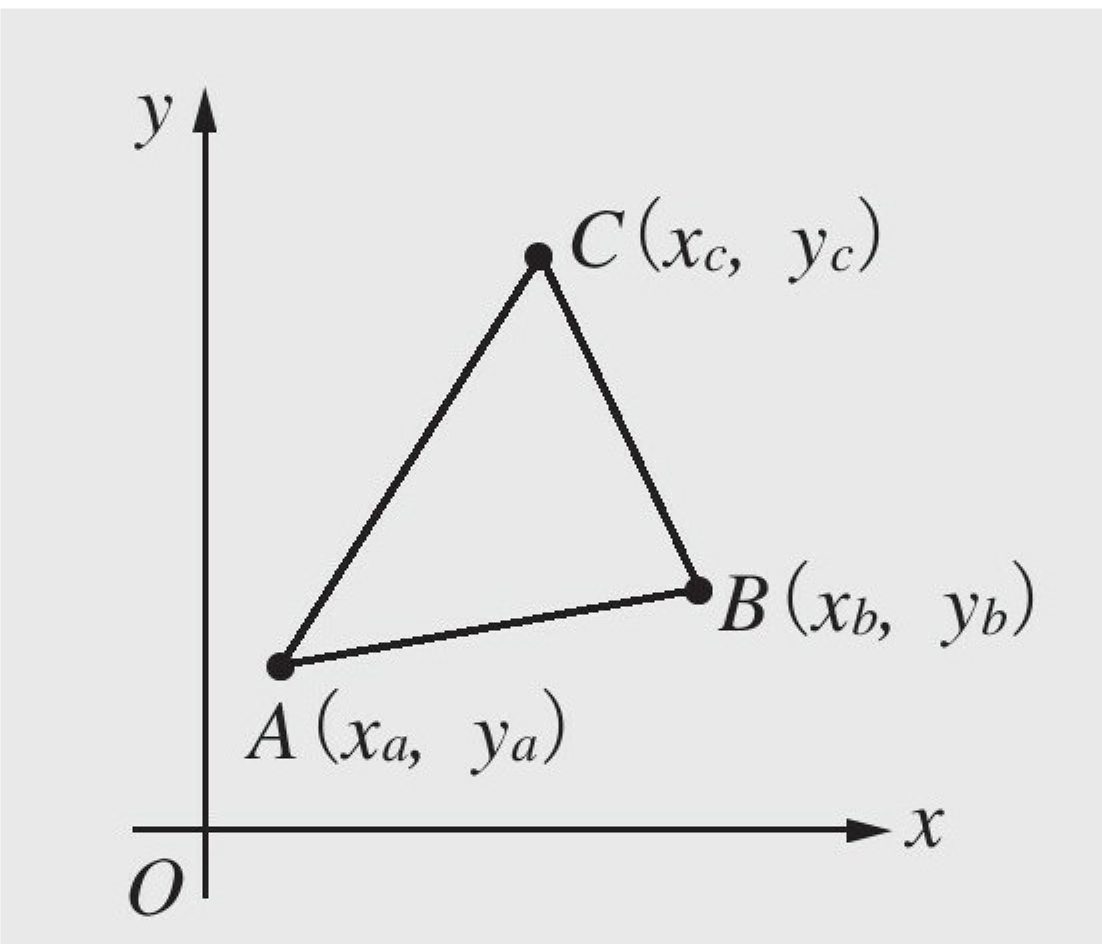
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

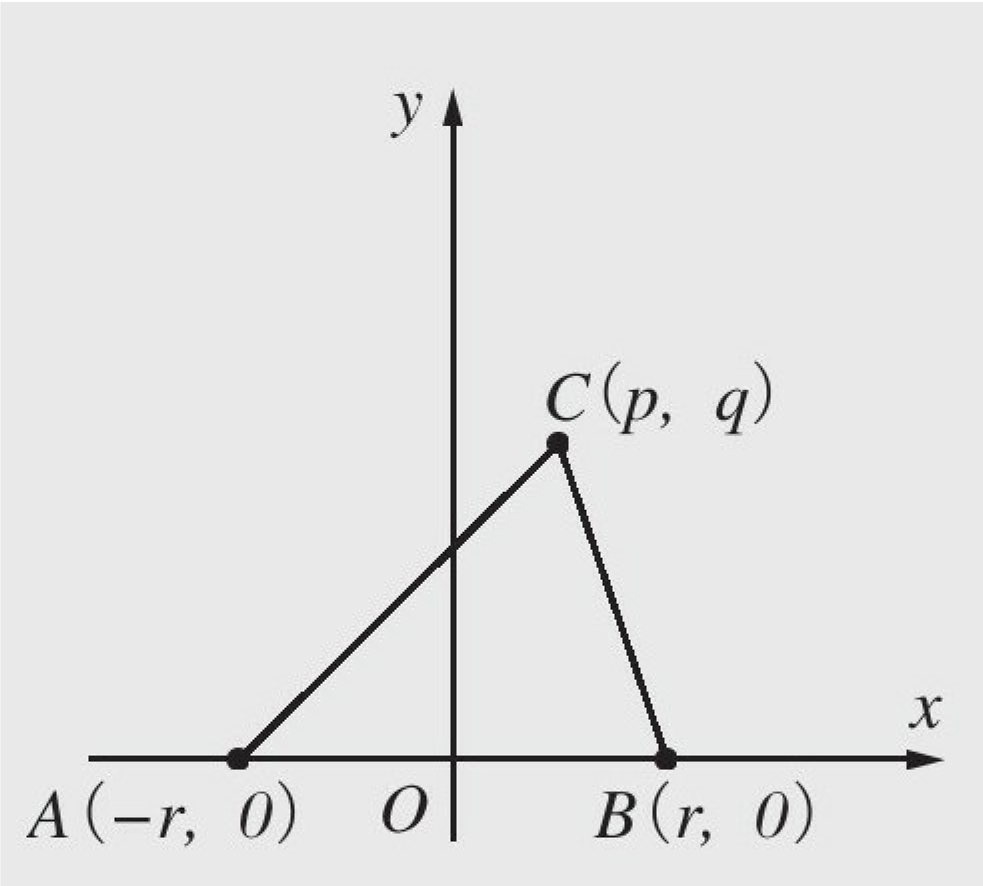
$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$

（3）设定对称的条件

举例来说，当我们在解△ABC的证明题并设定坐标时，



如果像这样设定的话，计算过程会变得十分复杂。不过呢，



如果像这样把AB置于x轴上，再以原点为中心，把A和B设定为对称的坐标，即可简化计算的过程。

只要把某样东西和对称的另一样东西凑成一对，即可看清楚事物的全貌，进而使信息量大幅增加，或是简化流程，从而达到事半功倍的效果。

我想能够活用对称性的机会，在实际生活中也多有所在，像是简报或会议时使用的资料，其实也可以加以应用。

（1）数与算式

数与集合：

- 实数
- 集合

算式：

- 算式的展开与因式分解
- 一元一次不等式

（2）图形和计量

三角比：

- 锐角三角比
- 钝角三角比
- 正弦定理
- 余弦定理

图形的计量：

（3）二次函数

二次函数及其图形

二次函数值的变化：

- 二次函数的最大值与最小值

- 一元二次方程式

- 一元二次不等式

（4）资料的分析

资料的离散

资料的相关

上图汇总的数据是初一数学各单元的内容。像这样利用对称性，把数据排列得整齐美观，看起来就一目了然了吧？而且在对称性的帮助下，一眼就可以看出“数与算式”和“图形和计量”是同一阶层的大单元，“实数”和“一元一次不等式”是同一阶层的小单元。无论是在自己制作数据，还是在浏览他人制作的数据时，只要关注数据的对称性，即可轻松掌握整体的构架。

追求一致性

各位知道人类至今为止发现的数学式当中，号称最美的式子是哪一个吗？就是一个名为“欧拉公式”的数学式。这个公式长这样（此处不需要理解这个公式，还请各位放心欣赏）：

$$ei\theta=\cos\theta+i\sin\theta$$

这个数学式代表的涵义是：起源完全不同的指数函数（$ei\theta$）和三角函数（$\cos\theta$和$\sin\theta$），在复质数的世界里存在着密切的关系。不仅如此，如果用π代入欧拉公式的θ，此公式就会变形为：

$$ei\pi+1=0$$

由于我们可以借此看出e（自然对数的底数）、i（虚数单位）、π（圆周率）、1（乘法的单位元）和0（加法的单位元）这几个非常重要的数之间的关系，因此也更加凸显此公式的重要性。

在战后的数学教育中留下重要足迹的远山启，曾经将此公式形容为：连接太平洋和大西洋的巴拿马运河。此外，《欧拉的礼物》（日本东海大学出版社）作者吉田武，把此公式比喻为连接虚与实、圆与三角的不可思议的环。连物理学家费曼（Richard Feynman）都称其为人类的至宝。

对于学习数学的人来说，此公式之所以显得如此美丽，不仅是因为它可以应用的范围很广，也因为它是一个结合了不同概念且形式非常简单的数学式。

19世纪初，活跃于英国的诗人约翰·济慈（John Keats），在他的《希腊古瓮颂》（Ode on a Grecian Urn）的最后一节写道：

“美即是真，真即美。（Beauty is truth, truth is beauty.）”

美丽的东西就是真实的，真实的东西是美丽的，从这句话来看，济慈似乎认为“美等价于真实”。虽然我很希望看到前半句的“美丽的东西就是真实的（美 $\Rightarrow$ 真实）”成立，可惜事实上却存在着明显的反例，不过至少后半句的“真实的东西是美丽的（真实 $\Rightarrow$ 美）”，早在这首诗诞生前，就一直是科学家心中的信条。“宇宙的真理是美丽的”，这句话可以说是古今中外学者共同的信仰吧？那么此处所谓的美，究竟指的是什么呢？答案就跟方才欧拉公式的美一样，指的就是单纯的一致性。

举例来说，“统一场论”是现代物理学的重要议题。物理学家们试图用理论式将重力、电磁力、强核力和弱核力等四种力整合在一起。虽然这里写的是“现代物理学”的议题，但自然物理学界很早开始就一直梦想着要把这个世界上的所有力量加以统一。牛顿和麦克斯韦（James Clerk Maxwell）也是追求这个梦想的挑战者之一。他们所有精彩的理论，几乎都是在尝试寻找能统一说明这个世界的通则时诞生的。

很可惜的是，他们的梦想并未实现，不过挑战这个梦想的人，并不是只有他们而已。一直以来，有无数的科学家，不管是赫赫有名的，还是默默无闻的，都把人生奉献在“找到通则”的梦想上，虽然都陆续遭遇失败。

为何科学家能够把人生奉献给前途渺茫的梦想呢？那是因为他们发自内心地相信世界应该是单纯而美丽的，而科学家应该也一致认同一件事，就是“未能发现掌管宇宙的美丽理论，都是因为人类太过驽钝”。

数学是一门建立在“看穿事物本质”精神上的学问。但尚未被揭发的本质究竟躲在哪里呢？像这样令人毫无头绪的情况比比皆是。无论在工作上还是生活上，人们因为无法看穿本质而苦恼的经历应该不少吧？遍寻不着的时候，大部分的人都会不自觉地往复杂的方向上思考。在这种时候，不妨稍微停下脚步，舍弃原先的想法，让思绪回到最简单的状态，因为本质从来就不是复杂的。

此外，当你认为自己发现了本质，但想确认它是不是真正的本质时，请检验该本质是否可以用来统一说明大部分的情况。如果它只适用于特定的情况，那肯定不是真正的本质。

“我怎么会知道那种事呢？本质有可能是复杂多变的啊！”

如果你这样说的话，一切就到此为止吧。但我们至少可以肯定的一点是，想要统一说明，甚至想让说明越简单越好的想法，是非常数学式的一种思维。而我认为人类的历史已经向我们证明，这样的思维正是带领我们看穿事物本质的最大功臣。

后记

辛苦了！首先，我想对读完本书的你，表达我的感谢与敬意。现在，不知道你有什么感受呢？是觉得“好难啊”，还是觉得“没想到还蛮简单的”？作为本书的作者，我当然希望答案是后者啦！

正如我在前言中所说，这本书是为了告诉各位，无论学文科还是学理科，你都拥有数学逻辑思维能力。本书介绍的内容并没有任何新的概念，都是各位在无意识中采取的思维模式。

一般来说，自称数学不好的人，大多很容易过度逃避理论性或含有数学观念在内的事物。但数学式思维是任何人都能做到的事，关键就在于能否清楚意识到思维的模式。

举例而言，运用必要条件进行筛选（第三章的第②方面）和反证法（第三章的第⑥方面）等，都是在很简单的事情上，使用各位平时常用的思维方式。如果各位能够意识到自己的思维方式，久而久之，自然也能够将之运用在更困难的问题上。

能够培养出应用能力，正是数学思考术的妙处。从今以后，碰到无法以直觉解决的问题时，各位再也不必感到畏缩了。请运用第三章介绍的七种数学思考术，尽情享受与问题斗智的喜悦与兴奋吧。

接下来要介绍的是谷歌在2004年刊登的招聘广告。这则广告曾经在网路上掀起一波讨论热潮，因此可能有很多人对它有印象。我想用数学式思维示范如何解决这道题目。

谷歌的招聘广告

2004年，硅谷的高速公路旁突然架起了一块巨大的广告牌。广告牌是白色的，上面只写着：

rst 10-digit prime found in consecutive digits of e. com

其实这是一则谷歌的招聘广告，但广告牌上完全没有显示此讯息。如果将广告牌内容翻译成中文的话，就是：

e中出现的第一个由10个连续数字组成的质数.com

看到“e的连续数字”，应该有很多人会疑惑：“这是什么意思？”其实它指的就是：

自然对数的底数e=2.718……

自然对数的底数e，是由下面这个稍微复杂的式子所定义的数字（也有别的定义），但此处我们就先不深入探讨这个部分了（这是日本高中数学III的内容）。

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

比较值得一提的是，e的值为：

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772

2178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595

7632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447

7741185374234544243710753907774499206955170276183860626133138458300

6737113200709328709127443747047230696977209310141692836819025515108

4250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931277361

8220826989519366803318252886939849646510582093923982948879332036250

6140397019837679320683282376464804295311802328782509819455815301756

1818815930416903515988885193458072738667385894228792284998920868058

6346324496848756023362482704197862320900216099023530436994184914631

3152096183690888707016768396424378140592714563549061303107208510383

6106873……

它是一个无限不循环的小数（无理数）。好了，接下来我们必须从中找出第一组由连续10个数字所组成的质数。

质数的寻找方式

我们应该如何分辨一个数字究竟是不是质数呢？所谓的质数，指的是除了1和本身以外，没有其他因数的自然数。首先，我们来具体地思考一下。

假设我们要求49这个数字的因数。

$49=1\times49$

$49=7\times7$

由此可知，49的因数为1、7和49，没错吧？除了1和49之外，7也是49的因数，所以49不是质数。

那么13呢？13除了1和13之外，无法用2～12的任何一个数字整除，所以13是质数对吗？我们可以试着除除看。

13÷2=6……1，无法整除；

13÷3=4……1，无法整除；

好了。由此可知13是质数。

咦？只要做到这种程度就够了吗？是的，这样就够了。

$3\times3<13<4\times4$

故$3 < \sqrt{13} < 4$

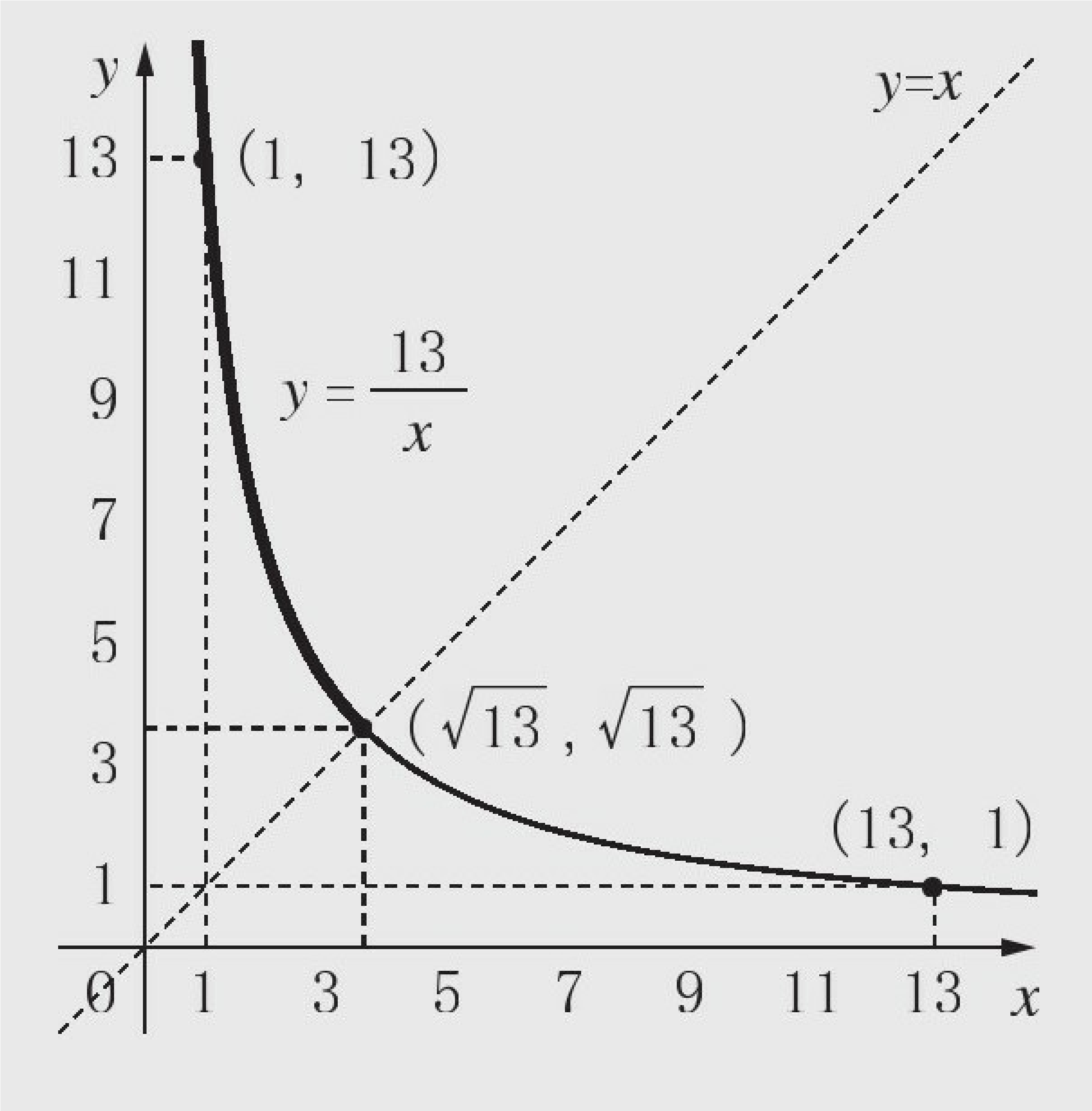
因此，假如13不是质数的话，肯定有3以下的质因数。虽然这么说，但我想各位看了应该还是无法领会吧？所以我决定再深入说明一下。假设：

$13=x\times y$

此时，x和y都是13的因数，对吧？我们可以把上面的式子变形为：

$$y=\frac{13}{x}$$

换言之，y和x成反比。反比的图形如右图所示。



寻找某数字的因数，意思等同于在反比例函数图形上寻找格子点（x坐标和y座标皆为整数的点）。而反比例函数的图形对称于y=x，因此我们只要在上页反比例函数图形的粗线部分寻找格子点即可。具体来说，就是在$x \le \sqrt{13}$的部分寻找即可。

我们再找一个大一点儿的数字来练习吧，就用151好了。要检验这个数字是不是质数，只要用2、3、5、7、11……从小的质数开始逐一相除即可，不过由

122=144　　132=169

可知：

$12\times12 < 151 < 13\times13$

$$\Rightarrow \sqrt{151} < 13$$

因此，如果151不是质数的话，肯定有未满13的因数。所以我们只要计算到未满13的质数，亦即11为止即可。

151÷2=75……1，无法整除；151÷3=50……1，无法整除；

151÷5=30……1，无法整除；151÷7=21……4，无法整除；

151÷11=13……8，无法整除。

由此可知，151是质数。

若要将以上的内容抽象化，就是：如果想要确认某数是否为质数，只要除以未满该数平方根的质数即可。了解质数的寻找方式以后，现在我们可以开始挑战谷歌的问题了。

现在挑战谷歌的问题

假设N是一个10位数的质数。此时，由于

$N < 1010$

因此

$$\sqrt{N} < \sqrt{10^{10}} = 10^{5}$$

所以如果要实际计算的话，只需要除以未满105的质数（5位数以下的质数）即可。换言之，就是除以1到99999之间的质数。虽然质数呈不规则状排列，但网络上随处可以查到相关资料。从1到99999之间的质数包括：

2，3，5，7，11，13，17……99961，99971，99989，99991

总共有9592个。

接下来我们将用Excel等电子表格软件进行整理。首先，在刚才的自然对数数列中，从小数点以下第一位开始截取10位数字，并依序向下挪一个位数，然后把数字横向排列。接着再把10万以内的质数纵向排列，最后相互交叉运算后，即可较容易找到答案。答案是……

e=2.7182818284590452353602874713526624977572470936999

59574966967627724076630353547594571382178525166427427466

391932……

大概在小数以下第100位的地方出现的“7427466391”。

听说当时只要点开{7427466391.com}的网站，再解开下一道题目，就可以把简历寄给谷歌了。

真不愧是谷歌，给大家出了一道这么有意思的题目。从这则乍看之下令人摸不着头

绪的广告中，可以看出应征者是否具有：

（ⅰ）知道自然对数底数e的数学素养

（ⅱ）懂得如何确认某数字是否为质数的思维能力

（ⅲ）对e的数列或10万以下质数的调查能力

（ⅳ）基本的软件（电子表格软件）操作能力

（ⅴ）尝试解决奇怪问题的求知欲

其中我认为最重要的就是（ⅴ）：是否具有求知欲。这道题目几乎不可能光靠直觉解题。不过，正如各位所见，只要运用利用对称性、套用具体实例、抽象化、整理等数学式思维，其实不必费尽心思也能够顺利得到答案。关键在于是否拥有挑战这类奇怪问题的好奇心，亦即是否具备足够的勇气，而这将会决定一个人能否在这场求职考验中闯关成功。本书介绍的数学式思维的七个方面，正是让各位拥有这份勇气的工具。只要能够对数学式思维有所意识并加以运用，那么你就可以脱离不擅长数学的队伍，从此以后再也不必因为觉得“我数学不好”而放弃逻辑式的思考。在我完成本书的这一刻，诚心希望各位读者在未来能够成为一名以数学逻辑思考的人。

永野裕之